المحاضرة الحادية عشرة

10/11/2013

تعريف المتسلسلة العقدية:

لتكن $\{z_n\}$ متتالية عقدية ولنعرّف $\{S_n\}$ كما يلي:

$$S_0 = z_0$$
$$S_1 = z_0 + z_1$$
$$S_2 = z_0 + z_1 + z_2$$
$$\vdots$$
$$S_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n = \sum_{i=0}^{n} z_i$$
$$\vdots$$

عندئذٍ ندعو المتتالية $\{S_n\}$ متسلسلة حدها العام z_n كما نرمز لها بـ $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ ونكتب اختصاراً $\sum z_n$، كما ندعو المتتالية $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum z_n$

تقارب متسلسلة عقدية:

نقول عن المتسلسلة $\sum z_n$ أنها متقاربة ومجموعها S إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية متقاربة ونهايتها S ونكتب في هذه الحالة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S$$

مبرهنة: بفرض $\sum z_n$ متسلسلة عقدية عندئذٍ:

$$\sum z_n \text{ متقاربة } \Rightarrow z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

الإثبات: بما أن $\sum z_n$ متقاربة عندئذٍ: $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية متقاربة ولنفرض أن $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$

نلاحظ أن $z_n = S_n - S_{n-1}$ وبجعل $n \to \infty$ فيكون:

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S - S = 0$$

ملاحظة: إذا كان الحد العام لا يسعى إلى الصفر فإن المتسلسلة متباعدة تكون

ملاحظة: إن عكس المبرهنة السابقة غير صحيح بالضرورة فلو أخذنا المتتالية $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ الذي حدها العام يسعى للصفر عندما $n \to \infty$ يكون:

$$\sum \frac{1}{n+1} \longrightarrow \infty$$

البرهان:

$$\sum \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots \frac{1}{16}}_{\frac{1}{2}} + \dots \longrightarrow \infty$$

المتسلسلة العددية الهندسية:

وهي متسلسلة من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} b.a^n$ حيث $a, b \in \mathbb{C}^*$

حيث نسمي b الحد الأول للمتسلسلة الهندسية و a بأساس المتسلسلة الهندسية ولدراسة تقارب وتباعد هذه المتسلسلة نميز الحالات التالية:

الحالة الأولى:

عندما: $|a| \geq 1$ وفي هذه الحالة تكون المتسلسلة الهندسية متباعدة لأن الحد العام لا يسعى إلى الصفر.

الحالة الثانية: $|a| < 1$

نلاحظ أن:

$$|b.a^n| = |b|.|a|^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

ولكن هذا لا يكفي للحكم على المتسلسلة

نضع

$$S_n = b + ba + \dots + b.a^n \quad \dots (1)$$

$$a S_n = ab + b.a^2 + \dots + b.a^n + b.a^{n+1} \quad \dots (2)$$

نطرح (2) من (1) فنجد:

$$S_n(1-a) = b(1-a^{n+1})$$

ومنه:

$$S_n = \frac{b(1-a^{n+1})}{1-a}$$

وعندما $n \to \infty$ يكون $a^{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ لأنه طالما $|a|<1$

فيكون

$$S_n \to S = \frac{b}{1-a}$$ والمتسلسلة متقاربة

تمرين: ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات التالية:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1+\frac{1}{8}i)^n$

متسلسلة هندسية حدها الأول $b=1$ وأساسها $a=1+\frac{1}{8}i$

نلاحظ أن:

$$|a| = |1+\frac{1}{8}i| = \sqrt{\frac{65}{64}} > 1$$

فالمتسلسلة المدروسة متباعدة.

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} i^n$

متسلسلة هندسية حدها الأول $b=1$ وأساسها $a=i$

نلاحظ أن: $|a| = |i| = 1$

وبالتالي المتسلسلة المعطاة متباعدة.

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)^n$

متسلسلة هندسية حدها الأول $b=3$ وأساسها $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

نلاحظ أن:

$$|a| = |\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

فالمتسلسلة متقاربة ومجموعها يعطى بالشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)^n = \frac{3}{1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)} = \frac{3}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}$$

$$= \frac{6(i+1)}{(1-i)(1+i)} = 3+3i$$

4) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n$ متسلسلة هندسية حدها الأول $b = -\frac{1}{4}$

وأساسها $a = \frac{i}{2}$ ونلاحظ أنه:

$|a| = \left|\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$

⟸ المتسلسلة المعطاة متقاربة وبالتالي مجموعها يعطى بالعلاقة:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n = \frac{b}{1-a} = \frac{-\frac{1}{4}}{1-\frac{i}{2}} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1+\frac{i}{2}}{(1-\frac{i}{2})(1+\frac{i}{2})}\right)$$

$$= -\frac{1}{\cancel{4}}\left(\frac{1+\frac{i}{2}}{\frac{5}{\cancel{4}}}\right) = -\frac{1}{5} - \frac{1}{10}i$$ وهذا عدد عقدي

مبرهنة: نفرض $\sum z_n$ ، $\sum w_n$ متسلسلتان عقديتان بحيث:

$\exists m \in \mathbb{N} ; \forall n \geq m \to z_n = w_n$

عندئذ: المتسلسلتين $\sum w_n$ ، $\sum z_n$ من نفس الطبيعة.

الإثبات:
لنضع $T_n = \sum_{i=0}^{n} w_i$ ، $S_n = \sum_{i=0}^{n} z_i$ فيكون من أجل $n \geq m$:

$S_n - T_n = (z_0 - w_0) + (z_1 - w_1) + (z_2 - w_2) + \dots + (z_{m-1} - w_{m-1}) + 0 + 0 + \dots$

وبالتالي:

$\sum z_n$ متقاربة $\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = S$ موجودة ومحدودة

$\Leftrightarrow \lim T_n = S + C$ موجودة ومحدودة

$\Leftrightarrow \sum w_n$ متقاربة

ملاحظة: إضافة أو إزالة عدد منتهٍ من حدود متسلسلة لا يؤثر على طبيعتها و لكنه يؤثر على مجموعها في حال كانت متقاربة.

مبرهنة: بفرض $\sum z_n$ متسلسلة عقدية عندئذٍ تكون $\sum z_n$ متقاربة إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon>0 : \exists n(\varepsilon)>0 ; \forall n,m \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |z_m + z_{m+1} + \dots + z_n| < \varepsilon$$

الإثبات: إن كانت $\sum z_n$ متقاربة $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ متقاربة $\xLeftrightarrow[\text{تام}]{\text{فضاء}}$ $\{S_n\}$ كوشية $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon>0 : \exists n(\varepsilon)>0 ; \forall n,m \geq n(\varepsilon) : |S_n - S_{m-1}| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |z_m + z_{m+1} + \dots + z_n| < \varepsilon$$

متسلسلتا الأجزاء الحقيقية والتخيلية لمتسلسلة عقدية:

لتكن $\sum z_n$ متسلسلة عقدية حيث $z_n = x_n + iy_n$ عندئذٍ ندعو:

$\sum x_n$ بمتسلسلة الأجزاء الحقيقية و

$\sum y_n$ بمتسلسلة الأجزاء التخيلية

مبرهنة: تكون المتسلسلة $\sum z_n = \sum (x_n + iy_n)$ متقاربة إذا وفقط إذا كانت متسلسلتا الأجزاء الحقيقية والتخيلية متقاربتين.

بمعنى آخر إذا كانت $S = A + iB$ عندئذٍ:

$$\sum x_n = A \wedge \sum y_n = B \Leftrightarrow \sum z_n = S$$

الإثبات: لنضع

$$S_n = z_0 + z_1 + \dots + z_n$$
$$= (x_0 + iy_0) + (x_1 + iy_1) + \dots + (x_n + iy_n)$$
$$= (x_0 + x_1 + \dots + x_n) + i(y_0 + y_1 + \dots + y_n)$$
$$= A_n + iB_n$$

وبالتالي تكون المتتالية $\{S_n\}$ متقاربة إذا وفقط إذا كانت المتتاليات $\{A_n\}$ و $\{B_n\}$ متقاربتان ومنه:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (A_n + iB_n) = A + iB$$

تمرين: ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات التالية:

1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n^3+n^2+1} + i\frac{1}{n^2+1} \right)$$

نلاحظ أن متسلسلتا الأجزاء الحقيقية والتخيلية متقاربتان وبالتالي المتسلسلة متقاربة

2) $$\sum \left(\frac{n^2}{n^3+n^2+1} + i\frac{1}{n^2+1} \right)$$

نلاحظ أن متسلسلة الأجزاء الحقيقية متباعدة فالمتسلسلة متباعدة

3) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + i\,3\left(\frac{2^n}{n!}\right) \right)$$

* نلاحظ أن متسلسلة الأجزاء الحقيقية $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ وهي متسلسلة هندسية

حدها الأول $b=1$ وأساسها $a=\frac{1}{2}$ وبالتالي:

$$|a| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

فهي متقاربة ومجموعها $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

* وأن متسلسلة الأجزاء التخيلية $\sum 3\frac{2^n}{n!} = 3\sum \frac{2^n}{n!} = 3e^2$

وبالتالي متسلسلة الأجزاء التخيلية متقاربة ومجموعها $S = 3e^2$

وبالتالي مجموع المتسلسلة المعطاة هو:

$$S = 2 + 3e^2 i$$

$$\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = e^x$$