الفضاءات الشعاعية والمولدات.

الفضاء الشعاعي: * تعريف: لتكن V مجموعة غير خالية و F حقل. نقول أن V فضاء شعاعي أو متجهي معرف على حقل F اذا كان V مزود بقانوني تشكيل الأول داخلي: $+ : V \times V \longrightarrow V$ ويسمى الجمع الشعاعي والثاني خارجي $\cdot : F \times V \longrightarrow V$ ويسمى الضرب السلمي.

حيث تتحقق الشروط الثمانية التالية $\forall u, v, w \in V$ و $\forall \lambda, \mu \in F$

1): $u + v = v + u$

2): $(u+v)+w = u+(v+w)$

3): يوجد عنصر $e \in V$ يحقق $u+e = e+u = u$ ؛ اشارة $e = 0$

4): يوجد $u' \in V$ حيث: $u+u' = u'+u = e$

ونرمز لـ u' بالرمز $-u$ ونقول أن u' نظير u بالنسبة للجمع الشعاعي.

5): $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$

6): $(\lambda+\mu) u = \lambda u + \mu u$

7): $(\lambda \mu) u = \lambda(\mu u)$

8): $1 \cdot u = u$ حيث 1 هو واحد الحقل F

أي الحيادي الضربي في F؟

نسمي عناصر الفضاء V بالأشعة وعناصر الحقل F بالمؤثرات. ونرمز للحيادي الجمعي e بالرمز 0 ويدعى الشعاع الصفري.

ونعبر عن عملية طرح الأشعة كالآتي:

طرح شعاعين هو أول شعاع + نظير الثاني؟ $\forall u, v \in V : u - v = u + (-v)$

أمثلة: (1): كل حقل F هو فضاء شعاعي معرف على نفسه.

(2): اذا كان $V = \mathbb{R}^n$ فإن V فضاء شعاعي معرف على حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ حيث:

$\forall : u = x_1, x_2, \dots, x_n ,\ v = y_1, y_2, \dots, y_n \in V$ $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$+ : V \times V \longrightarrow V$

$u + v = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$

$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$

$\lambda \cdot u = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$

والحيادي بالنسبة لجمع الأشعة هو $O(0,0,0,\dots,0)$ الصفر الشعاعي

ونظير الشعاع u هو: $-u = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$

٣: مجموعة $M_{m\times n}(F)$ كل المصفوفات ذات الرتبة $m\times n$ والمعرفة على حقل F مع جمع ~~وضرب~~ المصفوفات وضرب مصفوفة بعدد تشكل فضاء شعاعي معرف على الحقل F.

٤: لتكن $R_n[x]=\{f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a x+a_0, n\geq 0;\ a_i\in R ;\ 1\leq i\leq n$ توف مجموعة.

وهي مجموعة كل الحدوديات ذات الدرجة n على الأكثر والمعرفة على حقل الأعداد الحقيقية R.

لتكن $V=R_n[x]$ نعرف: $+ : V\times V \longrightarrow V$

$$(f\times g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$\cdot : R\times V \longrightarrow V$$

$$(\lambda . f)(x)=\lambda(f(x)).$$

فإن V يكون مع قانون تشكيل الجمع والضرب فضاء شعاعي معرف على حقل الأعداد الحقيقية R.

مثلا: $n=2$: $R_2[x]=\{ax^2+bx+c : a,b,c\in R\}$

مبرهنة: اذا كان V فضاء شعاعي معرف على حقل F وكان $u\in V$ و $\lambda\in F$ فإن القضايا التالية صحيحة:

$\boxed{1}$: $0\times u=0$ $\quad\quad$ $\boxed{3}$: $\lambda . 0=0$

$\boxed{2}$: $-1\times u=-u$ $\quad\quad$ $\boxed{4}$: $-\lambda . u=-(\lambda . u)$

$$\lambda(-u)=-(\lambda . u)$$

$\boxed{5}$: $(-\lambda)(-u)=\lambda . u$

$\boxed{6}$: اذا كان $\lambda . u=0$ فإن إما λ أو $u=0$.

الإثبات:

$\boxed{1}$: $u=1.u=(1+0)u=1.u+0.u \Rightarrow u-u=u-u+0.u$

$$0=0.u \Longleftarrow 0=0+0.u$$

$\boxed{2}$: $0=0.u=(1-1)u=1.u+(-1)u=u+(-1).u$

$$\Rightarrow -u=-1.u$$

$\boxed{3}$: $\lambda . u=\lambda(u+0)=\lambda . u+\lambda . 0 \Rightarrow \lambda . u-\cancel{\lambda u}=\lambda u-\lambda a+\lambda$

$$\Rightarrow 0=\cancel{\lambda}\lambda u$$

[4]: $0 = 0.u = (\lambda - \lambda).u = \lambda.u + (-\lambda).u \Rightarrow -(\lambda u) = (-\lambda)u$

وبالمثل نجد $-(\lambda.u) = \lambda(-u)$

[5]: $(-\lambda)(-u) = -(\lambda(-u)) = -(-(\lambda u)) = \lambda.u$

[6]: $\lambda.u = 0$ نفرض ما يلي:

① $\lambda = 0$ تم المطلوب

② $\lambda \neq 0$ ومنه $\exists \lambda^{-1} \in F$ بحيث $\lambda.\lambda^{-1} = 1$

لانضرب الطرفين (λ^{-1}): $\lambda^{-1}.\lambda u = \lambda^{-1}.0$

$1.u = 0 \Rightarrow u = 0$

الفضاءات الشعاعية الجزئية:

تعريف: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل F ولتكن W مجموعة جزئية غير فارغة ليست من V نقول بأن W فضاء شعاعي جزئي في V إذا وفقط إذا تحقق الشرطين: (مغلق للعملية الجمع)

1): $\forall u, v \in W : u+v \in W$

2): $\forall \lambda \in F, \forall u \in W : \lambda u \in W$ (مغلقة بالنسبة للضرب السلمي)

نستنتج من التعريف مباشرة بعض الخواص للفضاء الشعاعي الجزئي، نذكر منها:

1). إذا كان W فضاء شعاعي جزئي في الفضاء V ومعرف على حقل F فإن: $\forall u \in W \Rightarrow -u \in W$ لأن:

$\forall -1 \in F, \forall u \in W : -1u \in W$

2): $0 \in W$ الصفر ينتمي لأي فضاء شعاعي جزئي.

$\forall 0 \in F, \forall u \in W : 0.u \in W$

مثال: ليكن $V = \mathbb{R}^2$ فضاء شعاعي معرف على $\mathbb{R}$. إن $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ تشكل فضاء شعاعي جزئي في V لأن: $(0,0) \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$

- $\forall u = (x_1,y_1), v = (x_2,y_2) \in W \Rightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2$

$u+v = (x_1+x_2, y_1+y_2) \Rightarrow x_1+x_2 = y_1+y_2 \Rightarrow u+v \in W$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u = (x,y) \in W : \lambda(u) = (\lambda x, \lambda y)$

وبما أن $x=y$ فإن $\lambda x = \lambda y$ ومنه $\lambda u \in W$ وبالتالي W فضاء شعاعي جزئي في V.

/ /

مثال: اذا كان V فضاء شعاعي معرف على حقل F، فإن V فضاء شعاعي جزئي في V، كما أن $W=\{0\}$ فضاء شعاعي جزئي في V ويسمى الفضاء الشعاعي الصفري.

تمرين: اذا كان $V=\mathbb{R}^3$ فضاء شعاعي معرف على $\mathbb{R}$ أثبت أن

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-y+z=0\}$$

①: أثبت أن W فضاء شعاعي جزئي في V.

②: هل $W_1=\{(x,y,z):(x,z)\in\mathbb{R}^2\}$ فضاء شعاعي جزئي في V

مبرهنة: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل $\mathbb{R}$ ولتكن W مجموعة جزئية في V وغير خالية. W فضاء شعاعي جزئي في V اذا وفقط اذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \lambda,\mu\in F ; \forall u,v\in W : \lambda u+\mu v\in W$$

الإثبات: $\Leftarrow$ نفرض أن W فضاء شعاعي جزئي في V بما أن W مغلق بالنسبة لعملية الضرب السلمي يكون:

$$\forall \lambda,\mu\in F , \forall u,v\in W : \lambda u,\mu v\in W$$

وبما أن W مغلق بالنسبة لعملية الضرب السلمي يكون:

$$\forall \lambda,\mu,\in F : \forall u,v\in W : \lambda u,\mu v\in W$$

وبما أن W مغلق بالنسبة لعملية جمع الأشعة:

$$\lambda u+\mu v\in W.$$

$\Rightarrow$ نفرض أن الشرط محقق من أجل:

$\lambda=\mu=1\in F \Rightarrow$ فإن: $1.u+1.v=\lambda u+\mu v\in W$

من أجل $\mu=0$ فإن:

$$\lambda u=\lambda u+0v=\lambda u+\mu v\in W.$$

ومنه W فضاء شعاعي جزئي في V.

مثال لتكن: $V=M_{m\times n}(F)$ فضاء شعاعي معرف على حقل F. ان المجموعة W: $W=\{A\in V : A^t=A\}$ تشكل فضاء شعاعي جزئي في V

$$\forall \lambda,\mu\in F, \forall A,B\in W$$

$$(\lambda.A+\mu.B)^t=(\lambda.A)^t+(\lambda.B)^t$$

$$=\lambda.A^t+\mu B^t=\lambda A+\mu B$$

منقول أي عدد هو العدد نفسه