30/10/2013

المحاضرة الثامنة

الفصل الثاني : المتتاليات والمتسلسلات العقدية.

تعريف المتتالية العقدية :

هي كل تابع منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ أو مجموعة جزئية منها $A \subseteq \mathbb{N}$ ومستقره مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$

$$z : A \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$n \longmapsto z(n) = z_n$$

حيث نسمي z_n الحد العام أو الحد النوني للمتتالية العقدية كما نرمز للمتتالية $\{z_n\}_{n\in A}$ ونكتب اختصاراً :

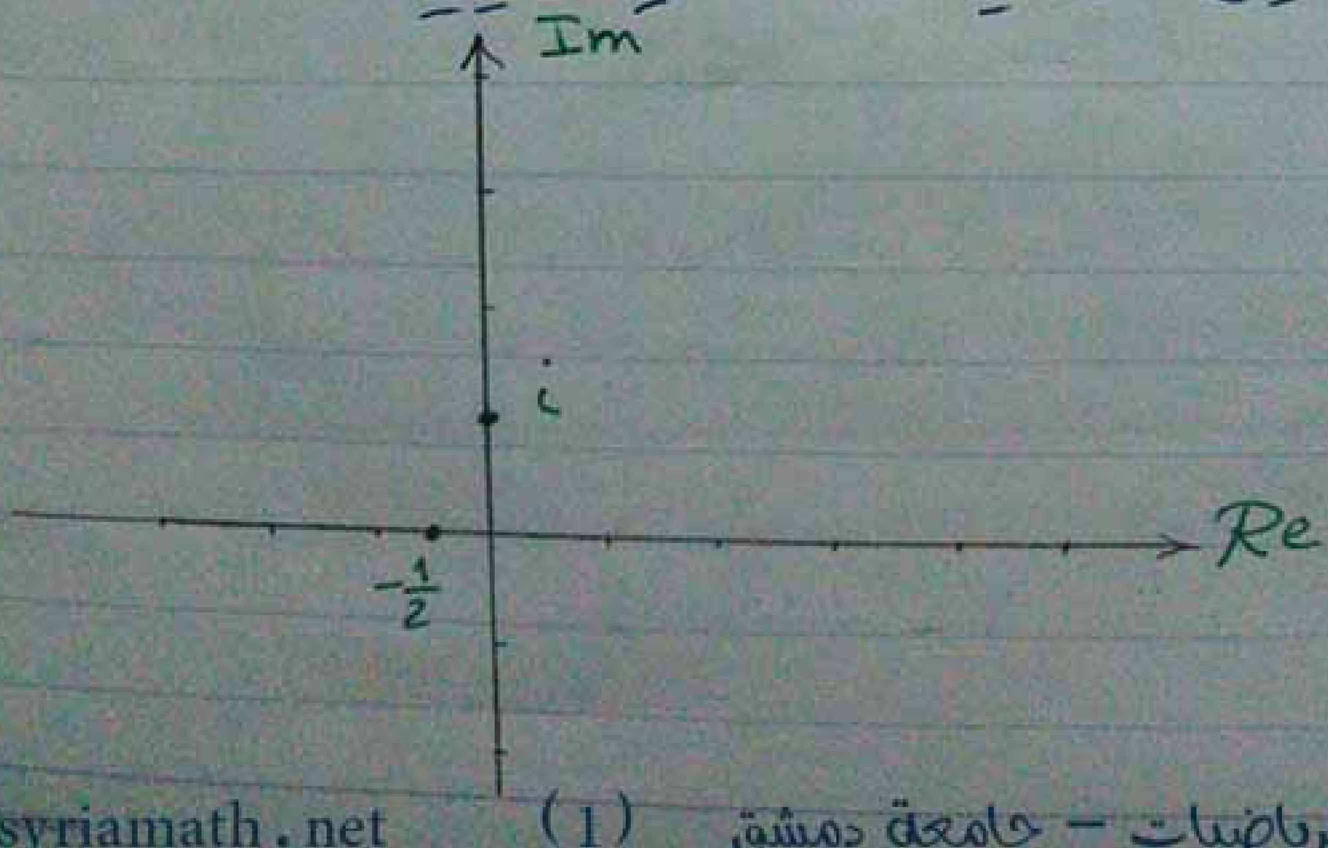
$\{z_n\}$ عندما $A = \mathbb{N}$ (اصطلاح).

إذا كانت A منتهية نقول أن المتتالية أنها منتهية وإذا كانت A غير منتهية نقول عن المتتالية أنها غير منتهية

مثال : لتكن المتتالية $\left\{\frac{i^n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ عندئذٍ :

$$\left\{\frac{i^n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*} = \left\{i, -\frac{1}{3}, \frac{-i}{3}, \frac{1}{4}, \frac{i}{5}, \frac{-1}{6}, \ldots\right\}$$

ويكون التمثيل الهندسي لهذه المتتالية كما يلي :



نعرف مجموعة قيم المتتالية بالمجموعة $\{z_n : n\in A\}$ بحيث لا نسمح تكرار العنصر z_n

مثال: لتكن المتتالية:

$$\{i^n\} = \{1, i, -1, -i, 1, i, -1, \dots\}$$

مجموعة قيم هذه المتتالية: $\{1, i, -1, -i\}$

نلاحظ أنه إذا كانت المتتالية منتهية فإن مجموعة قيمها منتهية إلا أن العكس غير صحيح بالضرورة والمثال في الأعلى خير دليل على ذلك.

متتالية الأجزاء الحقيقية والتخيلية لمتتالية عقدية:

لتكن المتتالية $\{z_n\}_{n\in A}$ عندئذٍ:

$$\forall n\in A : z_n \in \mathbb{C} \to z_n = x_n + i y_n$$

حيث:

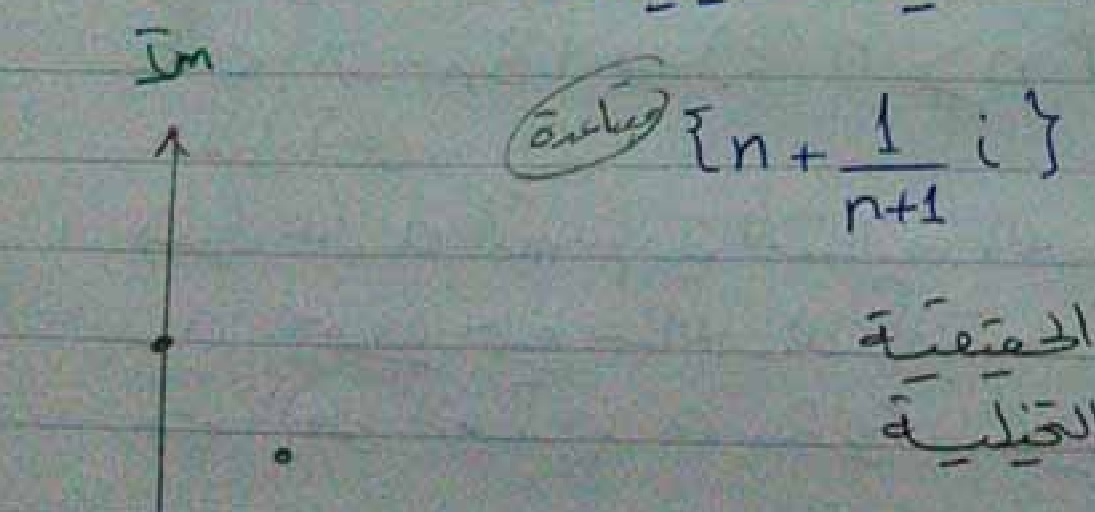
$$(x_n = Re(z_n) , y_n = Im(z_n)) \in \mathbb{R}$$

نسمي $\{x_n\}_{n\in A}$ متتالية الأجزاء الحقيقية لـ $\{z_n\}_{n\in A}$

$\{y_n\}_{n\in A}$ متتالية الأجزاء التخيلية لـ $\{z_n\}_{n\in A}$

حيث $\{x_n\}_{n\in A}$ ، $\{y_n\}_{n\in A}$ متتاليتان حقيقيتان.

مثال: لتكن المتتالية $\{n + \frac{1}{n+1} i\}$ متباعدة



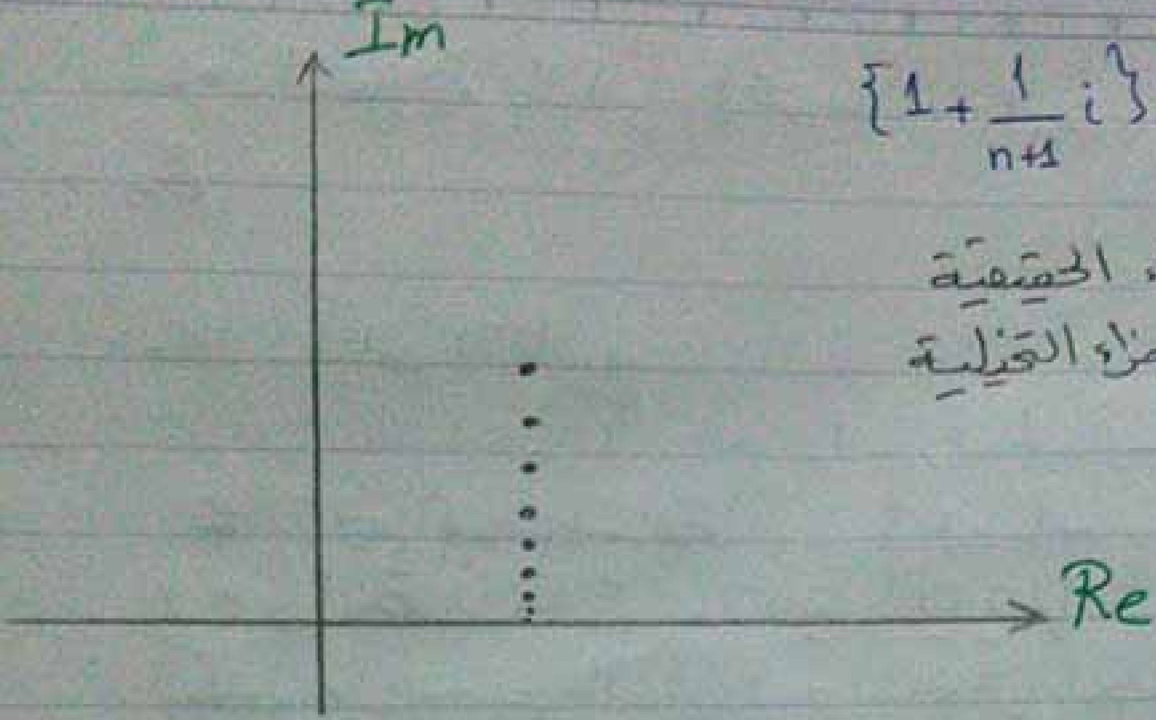
متباعدة $\{n\}$ متتالية الأجزاء الحقيقية

متقاربة $\{\frac{1}{n+1}\}$ متتالية الأجزاء التخيلية

مثال: لتكن المتتالية $\left\{1+\frac{1}{n+1}i\right\}$

$\{1\}$ متتالية الأجزاء الحقيقية

$\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ متتالية الأجزاء التخيلية



مثال: لتكن المتتالية:

$\{(1+i)^n\} = \{1, 1+i, 2i, -2+2i, -4, -4-4i, \dots\}$

فيكون:

$\{x_n\} = \{1, 1, 0, -2, -4, -4, \dots\}$

$\{y_n\} = \{0, 1, 2$

تقارب متتالية عقدية:

لتكن $\{z_n\}$ متتالية عقدية و $a \in \mathbb{C}$ عدد عقدي عندئذٍ:

نقول عن المتتالية $\{z_n\}$ أنها متقاربة من a إذا تحقق الشرط التالي: طويلة

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n(\varepsilon) > 0 ; \forall n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon$$

بمعنى آخر:

نقول عن a أنه نهاية للمتتالية العقدية $\{z_n\}$ إذا كان كل جوار لـ a يحوي جميع عناصر المتتالية عدا عدد منته منها.

ندعو العدد العقدي a بنهاية المتتالية $\{z_n\}$ ونكتب:

$$\lim_{n \to \infty} z_n = a$$

أو

$$z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$$

وإذا لم يوجد عدد مثل a يحقق الشرط السابق عندئذٍ نقول أنّ المتتالية أنها متباعدة. ويكون ذلك في الحالتين التاليتين :

متتالية حقيقية

* الحالة الأولى : $|z_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

أي لا يوجد عدد a يحقق الشرط السابق ونكتب في هذه الحالة :

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

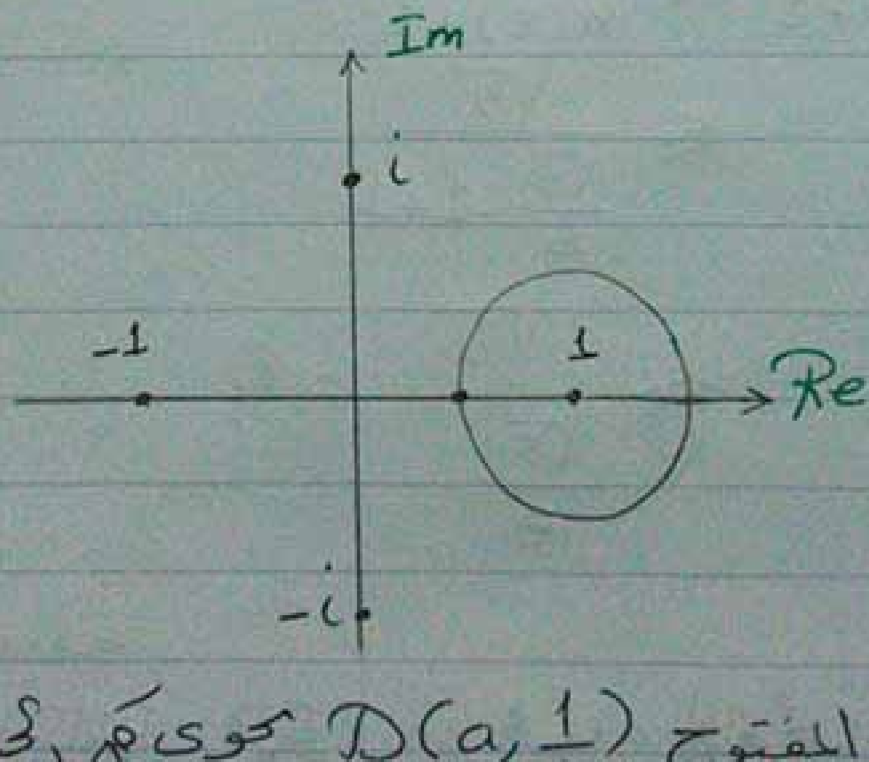
مثال :

المتتالية $\{(1+i)^n\}$ متباعدة لأنّ :

$$|z_n| = |(1+i)^n| = |1+i|^n = (\sqrt{2})^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

* الحالة الثانية : عدم وجود النهاية

مثال : المتتالية $\{i^n\}$ متباعدة وذلك لعدم وجود عدد عقدي a يحقق الشرط السابق أي أنه إذا كان $a \in \{1, i, -1, -i\}$



سؤال

عندئذٍ القرص المفتوح $D(a, \frac{1}{2})$ يحوي كل الحدود المساوية لـ a وخارجه عدد غير منتهٍ من حدود المتتالية.

$$|z_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n+1}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow n+1 > \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} - 1$$

تمرين: أثبت أن المتتالية $\left\{ \frac{1}{n+1} + i\,\frac{n-1}{n+1} \right\}$ متقاربة من

العدد العقدي $a = i$

الحل:

$$|z_n - a| = \left| \frac{1}{n+1} + i\,\frac{n-1}{n+1} - i \right|$$

$$= \left| \frac{1}{n+1} + i\,\frac{n-1-n-1}{n+1} \right| = \left| \frac{1}{n+1} + \frac{-2}{n+1}\,i \right|$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{n+1}$$

وبالتالي من أجل $\varepsilon > 0$ نختار $n(\varepsilon) = \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} - 1$

ومنه من أجل $n \geqslant n(\varepsilon)$ يكون:

$$|z_n - a| = \frac{\sqrt{5}}{n+1} \leqslant \frac{\sqrt{5}}{n(\varepsilon)+1}$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} - 1 + 1}$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

المتتالية المحدودة

نقول عن المتتالية $\{z_n\}$ أنها محدودة إذا وجد عدد حقيقي $0 < R < +\infty$ يحقق $\forall n \in \mathbb{N} : |z_n| < R$

بمعنى آخر:

نقول عن المتتالية $\{z_n\}$ أنها محدودة إذا وجد قرص مفتوح من الشكل $D(0, R)$ يحوي جميع عناصر المتتالية $\{z_n\}$

مثال: $\left\{\frac{i^n}{n+1}\right\}$ محدودة لأنه:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \left|\frac{i^n}{n+1}\right| = \frac{|i|^n}{|n+1|} = \frac{1}{n+1} < 2$$

غير متقاربة → غير محدودة

ملاحظة: كل متتالية متقاربة تكون محدودة إلا أن العكس غير صحيح بالضرورة

والدليل على ذلك المثال التالي:

$\{i^n\}$ محدودة ومتباعدة.

انتهت المحاضرة