المحاضرة الثالثة ٣/١١/٢٠١٣

تعريف: نقول عن المصفوفة $A(a_{ij}) \in M_{m\times n}(F)$ إنها مدرجة مختزلة إذا تحقق:

① A مدرجة

② العنصر الأول في كل سطر غير صفري هو العنصر الوحيد الذي لا يساوي الصفر

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
مدرجة غير مختزلة

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
مدرجة مختزلة.

انتهت المحاضرة

المحاضرة الثالثة ٣٠/١٥/٢٠١٣

ملاحظات:

كل مصفوفة تكافئ مصفوفة مدرجة تساويها بالرتبة.

تعريف: ~~لتكن~~ لتكن A مصفوفة معرفة على حقل F ومن الرتبة $m\times n$

نعرف رتبة المصفوفة A بأنها عدد الأسطر غير الصفرية في مصفوفتها المدرجة

ونرمز لها بالرمز $rank(A)$ مثال: أوجد $rank(a)$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-3/2R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -7/2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to -2/7R_3]{R_2\to 1/2R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وبالتالي $rank(A)=3$

ملاحظة: جميع المصفوفات المتكافئة لها نفس الرتبة.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow rank(A)=2$$

تمرين: أوجد رتبة المصفوفة:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & +1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{5\times 6}(\mathbb{R})$$

$$A\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & +3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -15/2 & +3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/30 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rank(A)=3$

حل جملة معادلات خطية:
لتكن

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

لتكن جملة معادلات خطية معرفة على حقل P ذات m مجاهيل m
نرمز للمصفوفة الأمثال:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(P)$$

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ مصفوفة الثوابت $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ مصفوفة المتغيرات

وبالتالي نرمز لجملة المعادلات الخطية بالرمز: $AX = B$
المصفوفة الموسعة:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

اذا كانت A مصفوفة معرفة على حقل P ومرتبتها $m\times n$ فإننا نقول
المصفوفة A هو مصفوفة B معرفة على الحقل P ومرتبتها $n\times m$ حيث أسطر
المصفوفة B هي أعمدة المصفوفة A ونرمز لها بالرمز $B = A^T$
مثال: اذا كانت A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

/ /

I) طريقة غاوس: نجري عدد من التحويلات السطرية على المصفوفة الموسعة من أجل تبسيط جملة المعادلات الخطية الأصلية ثم نكتب جملة المعادلات المكافئة للجملة الأصلية: مثال

أوجد مجموعة حلول جملة المعادلات الخطية المعرفة على حقل الأعداد الحقيقية:

$$x + y + 2z = 9$$
$$2x + 4y - 3z = 1$$
$$3x + 6y - 5z = 0$$

نكتب المصفوفة الموسعة :(أ)

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

نكتب المعادلات المكافئة:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 1 \quad , y = 2 \quad , z = 3$$

$$S = \{(1, 2, 3)\}$$

تمرين: أوجد مجموعة حلول المعادلات الخطية التالية المعرفة على حقل $\mathbb{R}$:

$x - y + z = 0$	$x + 2y - 2z = 5$	$5x - 3y + 2z = 7$
$x + y + 2z = 0$	$2x - y + z = 2$	$3x - 2y + z = 4$
$x + 2y - z = 0$	$3x + y - z = 8$	$2x - y + z = 5$
$S = \{(0, 0, 0)\}$	S عدد لانهائي من الحلول	$S = \varnothing$

II : استخدام مقلوب مصفوفة لحل جملة معادلات خطية:

لتكن $AX = B$ جملة معادلات خطية $A \in M_n(F)$ (عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات). و: $\det(A) \neq 0$

بعض الخواص: (1) اذا كانت A قابلة للقلب فإن $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$

$adj(A)$: هي المصفوفة الملحقة أو المرافقة.

(2): $A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = \det(A) I_n$ حيث I_n المصفوفة الواحدية.

/ /

مثال: أوجد مقلوب مصفوفة:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 6 & 3\\ 2 & -4 & 0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 6 & 3\\ 2 & -4 & 0\end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix}1 & 6\\ 2 & -4\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -4\end{vmatrix} + 0 = 16+48 = 64$$

$$= \begin{vmatrix} \begin{vmatrix}6 & 3\\ -4 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 6\\ 2 & -4\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}2 & -1\\ -4 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -4\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}2 & -1\\ 6 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 6\end{vmatrix} \end{vmatrix} \Rightarrow adj(A)=\begin{vmatrix}12 & 4 & 2\\ 6 & 2 & -10\\ -16 & 16 & 16\end{vmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{64}\begin{pmatrix}12 & 4 & 2\\ 6 & 2 & -10\\ -16 & 16 & 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6/32 & 2/32 & 1/32\\ 3/32 & 1/32 & -5/32\\ -8/32 & 8/32 & 8/32\end{pmatrix}$$

لتكن $AX=B$ جملة معادلات خطية ذات n مجهول و m معادلة

و $det(A)\neq 0$ ومنه نضرب الطرفين من اليسار بـ A^{-1}

$$A^{-1}.A\,X = A^{-1}.B$$

$$\boxed{X = A^{-1}.B}$$

مثال: أوجد مجموعة حلول المعادلات الخطية:

$$3x + 2y - z = 1$$
$$x + 6y + 3z = 2$$
$$2x - 4y = 3$$

الحل: نفس الخطوات السابقة.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 6 & +3\\ 2 & -4 & 0\end{pmatrix}$$