برهنة (١): اذا كانت a_n متتالية متقاربة فإنها كوشية.

الفرض: $\forall \varepsilon_1 > 0 : \exists N_{\varepsilon_1} : \forall n > N_{\varepsilon_1} \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon_1$

$\forall \varepsilon_2 > 0 : \exists N_{\varepsilon_2} : \forall m > N_{\varepsilon_2} \Rightarrow |a_m - a| < \varepsilon_2$

المطلوب:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon : \forall n > m > N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$

البرهان:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon : \forall n > m > N_\varepsilon \Rightarrow$

$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m|$

$\leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

ولو فرضنا $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ وبالتالي يكون $n > \max(N_{\varepsilon_1}, N_{\varepsilon_2})$

$\Rightarrow n > N_\varepsilon \Rightarrow \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

و. هـ. م

$\boxed{\text{انتهت المحاضرة}}$

المحاضرة الثامنة. ١٤ / ١١ / ٢٠١٣

برهنات لبعض خواص المتتاليات والنهايات الشهيرة.

* تعريف المتتالية العددية اللانهائية.
* المتتالية المحدودة.
* المتتالية المتقاربة / نهاية متتالية /.
* برهنات.
* خواص المتتاليات المتقاربة / النهايات /.
* أهم النهايات الشهيرة.
* المتتالية الرتيبة / المطردة / . الكوشية /.
* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من a $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من b $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

خواص النهايات (المتتاليات):

1): $\lim\limits_{n \to \infty} k\, a_n = k \lim\limits_{n \to \infty} a_n = k\, a$

2): $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \mp b_n) = a \mp b$

3): $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

4): $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a} \quad : \quad a \neq 0$ ، $\{a_n\}$ متتالية ليست صفرية

5): $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad : \quad 0 \neq b$ ، $\{b_n\}$ ليست متتالية صفرية

أهم النهايات المشهورة:

1): $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \implies \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad : \quad a > 0$

2): $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

3): $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

4): $\lim\limits_{n \to \infty} a^n =$

$$\begin{cases} 1 & a = 1 \\ \left.\begin{cases} 1 & n \text{ زوجي} \\ \text{متباعدة} \\ -1 & n \text{ فردي} \end{cases}\right\} & a = -1 \\ 0 & |a| < 1 \\ +\infty & a > 1 \\ \left.\begin{cases} +\infty & n \text{ زوجي} \\ -\infty & n \text{ فردي} \end{cases}\right\} & a < -1 \end{cases} \qquad |a| > 1$$

5): $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

6): $\lim\limits_{n \to \infty} n \cdot a^n = 0 \quad : \quad |a| < 1$

/ /

مبرهنة: اذا كانت المتتاليتان $\{a_n\}_{n\in N}$ ، $\{b_n\}_{n\in N}$ متقاربتين من a,b على الترتيب فإن المتتالية $\{a_n - b_n\}_{n\in N}$ متقاربة من $a-b$

البرهان: الفرض: $\forall \varepsilon_1 > 0 : \exists N_{\varepsilon_1} : \forall n > N_{\varepsilon_1} \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon_1$

$\forall \varepsilon_2 > 0 : \exists N_{\varepsilon_2} : \forall n > N_{\varepsilon_2} \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon_2$

الطلب:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow |(a_n - b_n) - (a-b)| < \varepsilon$

البرهان:

$I = |(a_n - b_n) - (a-b)| = |a_n - b_n - a + b|$

$= |a_n - a + b - b_n| \Rightarrow \leqslant |a_n - a| + |b_n - b|$

بما أن $\{a_n\}_{n\in N}$ متقاربة $\forall \varepsilon_1 > 0$ ، نختار $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$

وذلك من أجل $n > N_{\varepsilon_1}$

بما أن $\{b_n\}_{n\in N}$ متقاربة من $\forall \varepsilon_2 > 0$ ، نختار $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$

وذلك من أجل $n > N_{\varepsilon_2}$

مما سبق يمكن أن نكتب

$I < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

وذلك من أجل $\forall n > N_\varepsilon = \max(N_{\varepsilon_1}, N_{\varepsilon_2})$

ونستنتج أن $|(a_n - b_n) - (a-b)| < \varepsilon$.

و. هـ. م.

مبرهنة: اذا كانت المتتاليتان $\{a_n\}_{n\in N}$ ، $\{b_n\}_{n\in N}$ متقاربتين من a,b على الترتيب فإن المتتالية $\{a_n \cdot b_n\}_{n\in N}$ متقاربة من $a \cdot b$

الفرض: $\forall \varepsilon_1 > 0 : \exists N_{\varepsilon_1} : \forall n > N_{\varepsilon_1} \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon_1$

$\forall \varepsilon_2 > 0 : \exists N_{\varepsilon_2} : \forall n > N_{\varepsilon_2} \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon_2$

الطلب: $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow$

$|(a_n \cdot b_n) - (a \cdot b)| < \varepsilon$

البرهان: $I = |a_n b_n - ab| = |a_n \cdot b_n - ba_n + ba_n - ab|$

نضيف ونطرح $\boxed{ba_n}$

$$I = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)|$$

$$I \leqslant |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)|$$

$$I \leqslant |a_n||b_n - b| + |b(a_n - a)|$$

بما أن $\{a_n\}_{n\in N}$ متقاربة فهي محدودة أي أنه $\exists M > 0 : |a_n| \leqslant M, \forall n \in N$

بما أن $\{b_n\}_{n\in N}$ متقاربة وذلك $\forall \varepsilon_2 > 0$ فيمكن اختيار $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2M}$ من أجل $n > N_{\varepsilon_2}$

بما أن $\{a_n\}_{n\in N}$ متقاربة وذلك $\forall \varepsilon_1 > 0$ فيمكن اختيار $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$ من أجل $n > N_{\varepsilon_1}$

مما سبق نجد أن

$$I < M\varepsilon_2 + |b|\varepsilon_1 \quad \forall n > N_{\varepsilon_1}, \forall n > N_{\varepsilon_2}$$

$$\Rightarrow |a_n \cdot b_n - ab| < M\frac{\varepsilon}{2M} + |b|\frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} :$$

$$\forall n > N_\varepsilon = \max(N_{\varepsilon_1}, N_{\varepsilon_2})$$

$$|a_n \cdot b_n - ab| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow |a_n \cdot b_n - ab| < \varepsilon$$

و. هـ. م

مبرهنة ٤: اذا كانت $\{a_n\}_{n\in N}$ متقاربة من a فإن المتتالية $\{\frac{1}{a_n}\}_{n\in N}$ متقاربة من $\frac{1}{a}$

البرهان: لنفرض: $\forall \varepsilon_1 > 0 : \exists N_{\varepsilon_1} : \forall n > N_{\varepsilon_1} \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon_1$

المطلوب: $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon ; \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$

/ /

البرهان: $\left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a}\right|=\left|\frac{a-a_n}{a_n\cdot a}\right|=\frac{1}{|a_n|\cdot|a|}\,|a_n-a|$

بما أن $\{a_n\}_{n\in N}$ متتابعة فإنها محدودة وبما أنها محدودة فإنها محدودة من الأعلى والأدنى ولنختار أنها محدودة من الأدنى $\exists\, m>0 : m\leqslant |a_n| : \forall n\in N$

ونقلب هذه المتراجحة $\Leftarrow$ $\frac{1}{m}\geqslant\frac{1}{|a_n|}$

وبما أن $\{a_n\}_{n\in N}$ متقاربة $\forall \varepsilon_1>0$ فيمكن اختيار $n>N_{\varepsilon_1}$ من أجل $\varepsilon_1=\varepsilon|a|.m$ وذلك

وبالاستفادة مما سبق نكتب

$$\left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a}\right|<\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{|a|}\,\varepsilon_1=\frac{1}{m}\,\frac{1}{|a|}\cdot\varepsilon\, m|a|=\varepsilon$$

$$\Rightarrow\left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a}\right|<\varepsilon\ :\forall n>N_\varepsilon\geqslant N_{\varepsilon_1}$$

و. هـ. م

فكرة البرهنة (5):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\,a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\cdot\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{b}\cdot a$$
$$=\frac{a}{b}$$

و. هـ. م

$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\in N}$

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

(1): نثبت أنها تزايدية:

$$a_1=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=1+1=2$$
$$a_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=1+1+\frac{1}{4}$$
$$a_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=1+3(1)^2\cdot\frac{1}{3}+3\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot(1)+\left(\frac{1}{3}\right)^3$$
$$=1+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{27}$$

/ /

نلاحظ أن المتتالية $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n\in N}$ ؟ انها تزايدية

ج): نثبت أنها محدودة من الأعلى:

ملاحظة

إفادة

$$\left\{ \begin{aligned} (x+y)^n &= x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1} + y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \cdots + \\ &\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-r))}{r!}x^{n-r}\cdot y^r + y^n \end{aligned} \right\}$$

لو أخذنا العلاقة $(1+\frac{1}{n})^n$ ونعوضها في الإفادة السابقة نجد:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}(1)^{n-1}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}(1)^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(1)^{n-3}\left(\frac{1}{n}\right)^3$$

$$+ \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + \frac{1}{1!}\cdot\frac{n}{n} + \frac{1}{2!}n(n-1)\frac{1}{n\cdot n} + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\frac{1}{nnn}$$

$$+ \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\times 3\times 2\times 1}{n!}\cdot\underbrace{\frac{1}{n\cdot n\cdots n}}_{n \text{ مرة}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

$$+ \frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

أي المتتالية: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$

$$< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

وبالتالي فهي محدودة.

إفادة: مجموع المتتالية الهندسية

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\cdot r^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

الحد الأول