حل الوظيفة :

1) $y' + (tg\ x)y = \frac{1}{\cos x}$ ....(1)

الحل : نحل المعادلة المتجانسة

$$y' + (tg\ x)y = 0$$

$$\Rightarrow\ y' = -(tg\ x)y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -(tg\ x)y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -tg\ x\, .\, dx$$

بالمكاملة :

$$\Rightarrow \ln|y| = -\int tg\ x\, .\, dx\ + \ln|c|$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{c}\right| = \ln|\cos x|$$

$$\Rightarrow \frac{y}{c} = \cos x \Rightarrow y = c.\cos x$$

الحل العام للمعادلة المتجانسة

نجعل c تابعاً لـ x لإيجاد الحل الخاص

$$\Rightarrow y = c\,(x).\cos x \qquad ....(2)$$

نشتق :

$$y' = c'(x).\cos x - \sin x\, .\, c(x)$$

نعوض في (1)

$$\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow c'(x).\cos x - \sin x\, .\, c(x) + (tg\ x).\, c(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow\ c'(x).\cos x - \sin x\, .\, \cancel{c(x)} + \sin x\, .\, \cancel{c(x)} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow c'(x).\cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow c'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

بالمكاملة :

$$c(x) = tg\ x + c_1$$

نعوض في (2)

$$\Rightarrow y = (tg\ x + c_1).\cos x$$

$$\Rightarrow y = \sin x + \cos x\, .\, c_1$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية

2) $y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}$ ....(1)

$y(1) = 1$ الملائم للشروط

الحل :

نحل المعادلة المتجانسة :

$$y' + \frac{3}{x}y = 0$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{3}{x}\,y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3}{x}\,y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -3\frac{dx}{x}$$

بالمكاملة :

$$\Rightarrow \ln|y| = -3\ln|x| + \ln|c| \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{c}\right| = -3\ln|x| = \ln x^{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{c} = x^{-3} \Rightarrow y = \frac{c}{x^3}$$

الحل العام للمعادلة المتجانسة

نجعل c تابعاً لـ x لإيجاد الحل الخاص

$$\Rightarrow y = \frac{c(x)}{x^3} \quad .....(2)$$

بالاشتقاق

$$y' = \frac{c'(x).x^3 - 3x^2.c(x)}{x^6} \Rightarrow y' = \frac{c'(x)}{x^3} - \frac{3c(x)}{x^4}$$

نعوض في (1)

$$\frac{c'(x)}{x^3} - \cancel{\frac{3c(x)}{x^4}} + \cancel{\frac{3}{x}\cdot\frac{c(x)}{x^3}} = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \frac{c'(x)}{x^3} = \frac{2}{x^3}$$

$$\Rightarrow c'(x) = 2 \Rightarrow c(x) = 2x + c_1$$

نعوض في (2)

$$\Rightarrow y = \frac{2x}{x^3} + c_1$$ الحل العام للمعادلة التفاضلية

الآن نعوض $y(1) = 1$

$1 = \frac{2}{1} + c_1$ فنجد $c_1 = -1$ ومنه يكون الحل الخاص

$$y = \frac{2x}{x^3} - 1$$

معادلة برنولي :

تعريف :

نقول عن المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى أنها معادلة برنولي إذا كانت من الشكل :

$$y' + p(x).y = q(x).y^n \quad ; \quad n \neq 1$$

حيث $P(x)$ و $q(x)$ دوال معرفة مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالتالي على كل مجال من $\mathbb{R}$

لحل معادلة برنولي نقوم بما يلي :

- نقسم على y^n فنحصل على :

$$\frac{y'}{y^n} + p(x).\frac{1}{y^{n-1}} = q(x)$$

- نفرض :

$$\boxed{z = \frac{1}{y^{n-1}} \Rightarrow z' = \frac{1-n}{y^n}\,y'}$$

- بالتعويض نجد :

$$\frac{1}{1-n}.z' + p(x).z = q(x)$$

أو :

$$z' + (1-n)p(x).z = (1-n).q(x)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية نعلم كيفية حلها

مثال 1 : أوجد الحل العام للمعادلة

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{2y}$$

الحل :

نضرب الطرفين بـ $2y$:

$$\Rightarrow 2yy' + \frac{2}{x}.y^2 = 1 \quad .... 1$$

نفرض أن :

$$z = y^2 \Rightarrow z' = 2yy'$$

نعوض في المعادلة 1 ....

$$\Rightarrow z' - \frac{2}{x}.z = 1 \quad .... 2$$

وهي معادلة تفاضلية خطية .

نحل المعادلة المتجانسة :

$$z' - \frac{2}{x} . z = 0 \Rightarrow z' = \frac{2}{x} . z \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = 2x . z \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = 2\frac{dx}{x}$$

بالمكاملة :

$$\ln|z| = 2\ln|x| + \ln|c| \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{z}{c}\right| = 2\ln|x| = \ln x^2$$

$$\Rightarrow \frac{z}{c} = x^2 \Rightarrow z = c . x^2$$ الحل العام للمعادلة المتجانسة

نجعل c تابعاً لـ x لإيجاد الحل الخاص لـ 2 ....

$$\Rightarrow z = c(x) . x^2 \quad .... 3$$

نشتق :

$$z' = c'(x). x^2 + 2x . c(x)$$

نعوض في 2 ....

$$\Rightarrow c'(x). x^2 + \cancel{2x . c(x)} - \cancel{\frac{2}{x} . c(x) . x^2} = 1$$

$$\Rightarrow c'(x) . x^2 = 1 \Rightarrow \quad c'(x) = \frac{1}{x^2}$$

بالمكاملة :

$$\Rightarrow c(x) = -\frac{1}{x} + c_1$$ الحل الخاص

نعوض في 3 ....

$$\Rightarrow z = \left(-\frac{1}{x} + c_1\right) . x^2$$

$$\Rightarrow z = -x + c_1 x^2$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية (نعوض z بقيمتها)

مثال 2 : أوجد الحل العام للمعادلة :

$$y' + 2xy = -xy^4$$

الحل : نقسم الطرفين على y^4 :

$$\frac{y'}{y^4} + \frac{2x}{y^3} = -x \quad .... *$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^4} + 2x\, y^{-3} = -x$$

نفرض :

$$z = y^{-3}$$

$$\Rightarrow z' = -3y^{-4}\, y' = -3\frac{y'}{y^4}$$

نعوض في * .... فنجد :

$$-\frac{1}{3} z' + 2xz = -x$$

نضرب الطرفين بـ (3 -)

$$\Rightarrow z' - 6xz = 3x \quad .... 1$$

وهي معادلة تفاضلية خطية لحلها نحل المعادلة التفاضلية المتجانسة

$$z' - 6xz = 0$$

$$\Rightarrow z' = 6xz \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = 6x.dx$$

بالمكاملة :

$$\ln|z| = 3x^2 + \ln|c| \Rightarrow \ln\left|\frac{z}{c}\right| = 3x^2$$

$$\Rightarrow \frac{z}{c} = e^{3x^2} \Rightarrow \quad z = e^{3x^2} . c$$ الحل العام للمعادلة المتجانسة

نجعل c تابعاً لـ x لإيجاد الحل الخاص

$$\Rightarrow z = e^{3x^2}. \ c(x) \quad .... 2$$

نشتق :

$$z' = c'(x) . e^{3x^2} + 6x . e^{3x^2}. \ c(x)$$

نعوض في المعادلة 1 ....

$$c'(x) . e^{3x^2} + \cancel{6x . e^{3x^2}. \ c(x)} - \cancel{6x \left(e^{3x^2}. \ c(x)\right)} = 3x$$

$$\Rightarrow c'(x). e^{3x^2} = 3x \Rightarrow \quad c'(x) = \frac{3x}{e^{3x^2}} = 3x . e^{-3x^2}$$

بالمكاملة :

$$c(\cancel{x}) = \frac{3x^2}{2} . \frac{1}{-3x^2} \ e^{-3x^2} + c_1 \Rightarrow \quad c(x) = -\frac{1}{2} . \ e^{-3x^2} + c_1$$

نعوض في 2 ....

$$\Rightarrow z = -\frac{1}{2} + e^{3x^2} . \ c_1$$ الحل العام للمعادلة التفاضلية

... انتهت المحاضرة (7) ...