المحاضرة الخامسة. ٦ / ١١ / ٢٠١٢

## المتتاليات العددية اللانهائية

* المتتالية المتقاربة.
* برهنات:

①: اذا كانت المتتالية متقاربة فإنها محدودة.

②: اذا كانت المتتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة.

* خواص المتتاليات المتقاربة. {خواص النهايات}
* أهم النهايات الشهيرة.
* حل أمثلة وتدريبات.

### خواص المتتاليات المتقاربة:

اذا كانت $\{a_n\} : n \in \mathbb{N}$ متقاربة من $a$ ، $\{b_n\} : n \in \mathbb{N}$ متقاربة من $b$

①: $\{k a_n\} : n \in \mathbb{N}$ متقاربة من $ka$

1] $\lim_{n\to\infty} k a_n = k a$

②: $\{a_n \mp b_n\} : n \in \mathbb{N}$ متقاربة من $(a \mp b)$

2] $\lim_{n\to\infty} (a_n \mp b_n) = a \mp b$

③: $\{a_n . b_n\} : n \in \mathbb{N}$ متقاربة من $(a . b)$

3] $\lim_{n\to\infty} (a_n . b_n) = a . b$

④: $\left\{\frac{1}{a_n}\right\} : n \in \mathbb{N}$ متقاربة من $\frac{1}{a}$ بحيث أن المتتالية $a_n$ ليست صفرية

4] $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{a}$ ، $a \neq 0$ و $a_n$ ليست صفرية

⑤: $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} : n \in \mathbb{N}$ متقاربة من $\frac{a}{b}$ : $b \neq 0$

5] $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ : $b \neq 0$ و $b_n$ ليست صفرية

⑥: $a_n \geq 0$ و $b_n \geq 0$ من $n \geq n_0$

6] if $a_n \leq b_n$ , $n \geq n_0$

Then $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$

if: $\exists\, c_n \in \mathbb{R}$:

if $\left\{ \begin{array}{l} a_n \leq c_n \leq b_n \\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L \end{array} \right\}$ Then $\lim_{n\to\infty} c_n = L$

ملاحظات:

1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$

2) $\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = e^{\lim_{n\to\infty} a_n}$

3) $\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \ln \lim_{n\to\infty} a_n$

أهم النهايات الشهيرة:

1) $\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \quad ; |a| < 1$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad ; p > 0$

3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \; ; a > 0$

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

5) $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

6) $\lim_{n\to\infty} n \cdot a^n = 0 \; ; |a| < 1$

7) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

4) مبرهنة: اذا كانت المتتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة.

البرهان: نفرض جدلاً أن المتتالية $\{a_n\}_{n\in N}$ متقاربة ومن نهايتين مختلفتين $a, b$ ، لنبرهن أن $a = b$

$\forall \varepsilon > 0 \; ; \frac{\varepsilon}{2} > 0$

بما أن $\{a_n\}_{n\in N}$ متقاربة من $a$ فإن

$\forall \varepsilon_1 > 0 : \exists N_{\varepsilon_1} ; n > N_{\varepsilon_1} \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon_1$

بما أن $\{a_n\}_{n\in N}$ متقاربة من $b$ فإن

$\forall \varepsilon_2 > 0 : \exists N_{\varepsilon_2} ; n > N_{\varepsilon_2} \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon_2$

ومن خواص القيمة المطلقة نجد أنه

$|a - b| = |a - a_n + a_n - b|$

$= |a_n - a| + |a_n - b|$

$\Rightarrow |a - b| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

$\forall n > \max(N_{\varepsilon_1}, N_{\varepsilon_2})$

$|a - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

$|a - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$0 \le |a-b| < \varepsilon$

وإذا جعلنا $\varepsilon \to 0$ أصغر ما يمكن ولكن بقيم موجبة $\Leftarrow$

$a=b \Leftarrow a-b=0 \Leftarrow |a-b|=0$

و. هـ. م

$\boxed{4}$ إذا كانت المتتالية متقاربة فإنها محدودة.

الفرض: $\{a_n\}_{n\in N}$ متقاربة من $a$

$\forall \varepsilon>0 : \exists N_\varepsilon : n \ge N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

المطلوب: $\{a_n\}_{n\in N}$ محدودة.

$\exists M>0 : |a_n| \le M \ \forall n\in N$

البرهان: $|a_n| = |a_n - a + a| \le \underline{|a_n - a|} + |a|$

$\{a_n\}_{n\in N}$ متقاربة ولنجعل $\varepsilon=1$ $\Leftarrow$

$|a_n| < 1 + |a| : \forall n > N_1$

$M = 1+|a| + \max(|a_i|) : i=1,2,\dots,N_1$

$\Rightarrow \exists M>0 : |a_n| \le M \ \forall n\in N$

$\therefore M = 1+|a|+\max(|a_i|) : i=1,2,\dots,N_1$

و.هـ.م

نستنتج من هذه المتتالية أنه: {كل متتالية غير محدودة فإن متقاربة

ولكن ليس بالضرورة أن تكون صحيحة}

فمثلاً لو أخذنا المتتالية $\{(-1)^n\}$

$\{(-1)^n\} = \{-1,+1,-1,\dots\}$

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n = \begin{cases} +1 & : n \text{ زوجي} \\ -1 & : n \text{ فردي} \end{cases}$$

$\boxed{3}$ أثبت أن $Q$ كثيفة في $R$:

$\forall a,b\in R,\ a<b : \exists q\in Q : a<q<b$

البرهان: إن هذه المبرهنة تبرهن حسب خاصيتين:

$\boxed{1}$ الخاصية الواحدية الفردية.

$\boxed{2}$ خاصية أرخميدس.