حل تمرين المحاضرة السابقة ..

ليكن لدينا التكامل :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5 x . dx$$

ضع ($\sin x = \sqrt{t}$) واستنتج أن I تكامل بيتّـاوي ,, ثم احسب I بالإستفادة من التكامل الغمّاوي .

الحل :

$$\sin x = \sqrt{t} \xrightarrow{\text{نأخذ تفاضل الطرفين}} \cos x . dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} . dt \Longrightarrow dx = \frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}} . \frac{dt}{\cos x}$$

$$\Longrightarrow dx = \frac{1}{2} . t^{-\frac{1}{2}} . \frac{dt}{\sqrt{1 - sin^2 x}} = \frac{1}{2} . t^{-\frac{1}{2}} . \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$$

$$\Longrightarrow dx = \frac{1}{2} . t^{-\frac{1}{2}} . (1-t)^{-\frac{1}{2}} . dt$$

وحدود التكامل : عندما $x = 0 \Longrightarrow t = 0$ & وعندما $x = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow t = 1$

$$\Longrightarrow I = \int_0^1 t^{\frac{5}{2}} . \frac{1}{2} . t^{-\frac{1}{2}} . (1-t)^{-\frac{1}{2}} . dt$$

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 . (1-t)^{-\frac{1}{2}} . dt \Longrightarrow I = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{(2+1)-1} . (1-t)^{\left(-\frac{1}{2}+1\right)-1} . dt$$

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{2} \mathrm{B} \left(3 , \frac{1}{2}\right)$$

إذاً I تكامل بيتّـاوي .. ومن العلاقة بين التابعين الغمّاوي والبيتّـاوي نجد أنَّ :

$$I = \frac{1}{2} . \frac{\Gamma(3) . \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{1}{2} . \frac{\Gamma(2+1) . \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)} = \frac{1}{2} . \frac{2! . \sqrt{\pi}}{\frac{5}{2} . \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{5}{2} . \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{15}{4}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{15}{8}} \Rightarrow I = \frac{8}{15}$$

تذكرة :

1) - لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع معرفة على مجال مثل I .. يقال عن التابع $f(x)$ المعرف على I أنه نهاية هذه المتتالية (تابع النهاية) إذا كانت :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

2) - يقال عن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ المعرفة على I إنها متقاربة (نقطياً) من التابع $f(x)$ على I إذا تحقق ما يلي :

أياً كان $\varepsilon > 0$ وأياً كانت $x \epsilon I$ فإنه يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون : $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ عندما $n \geq N_0$ .. ((حيث N_0 تتبع لـ ε وللنقاط $x \epsilon I$)) .

3) - يقال عن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ المعرفة على I إنها متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على I إذا تحقق ما يلي :

أياً كان $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون : $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ عندما $n \geq N_0$ ومن أجل كل النقاط $x \epsilon I$ .. ((حيث N_0 تتبع لـ ε فقط)) .

مبرهنة <1> :

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع معرفة على مجال مثل I .. ولنفرض أن جميع حدود هذه المتتالية هي توابع مستمرة على I .. ولنفرض أن هذه المتتالية متقاربة بانتظام من تابع مثل $f(x)$ على I ..
عندئذٍ : يكون هذا التابع $f(x)$ مستمراً على I .

الإثبات :

لتكن $x_0 \epsilon I$ .. وليكن $\varepsilon > 0$ .. عندئذٍ : $\frac{\varepsilon}{3} > 0$.

وبما أن : $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من $f(x)$ على I .. فإنه يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون :

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

عندما : $n \geq N_0$ ومن أجل كل النقاط $x \epsilon I$ ..

ليكن $n \geq N_0$ ولتكن $x \epsilon I$ عندئذٍ يكون التابع $f_n(x)$ مستمراً على I (بحسب الفرض)

ومنه يكون $f_n(x)$ مستمر عند النقطة x_0 .. ومنه يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون :

$$|x - x_0| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ومنه : $|x - x_0| < \delta \implies$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

إذاً $f(x)$ مستمر عند x_0 وبما أن النقطة x_0 من I فإننا نستنتج أن $f(x)$ مستمر على I .. وهو المطلوب .

نتيجة :

إذا كانت لدينا متتالية توابع مستمرة على مجال مثل I وكان تابع النهاية لها على هذا المجال غير مستمر على هذا المجال فإن تقارب هذه المتتالية يكون غير منتظم على هذا المجال .

ملاحظة :

من الممكن أن تكون كل التوابع التي تشكل حدود المتتالية غير مستمرة على المجال المدروس ولكن تابع النهاية لهذه المتتالية مستمر على هذا المجال .

مثال :

لنأخذ المتتالية التي حدها العام :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & (\text{عندما } |x| < 1) \\ 1 & (\text{عندما } |x| = 1) \\ \frac{n+1}{n} & (\text{عندما } |x| > 1) \end{cases}$$

نلاحظ أن المتغير x لم يظهر في الحد العام وما ظهر فقط هو n عندئذٍ نكتب الحد الأول لهذه المتتالية :

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (\text{عندما } |x| < 1) \\ 1 & (\text{عندما } |x| = 1) \\ 2 & (\text{عندما } |x| > 1) \end{cases}$$

وبالتالي غير مستمرة .. لنرى الآن ما إذا كان تابع النهاية لهذه المتتالية موجوداً .. فنجد أن :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$$

إذاً : تابع النهاية للمتتالية المدروسة موجود .. ومنه المتتالية متقاربة (نقطياً) .

مبرهنة <2> :

لتكن $\{f_n(x)\}$ معرفة على مجال مثل I .. ونفرض أن جميع حدود هذه المتتالية هي توابع محدودة على I

ولنفرض أن هذه المتتالية متقاربة بانتظام من $f(x)$ على I .. عندئذٍ :

يكون التابع $f(x)$ محدوداً على I .

تذكرة : (تعريف التابع المحدود)

$f(x)$ محدود على $I \iff \forall x \in I \quad |f(x)| < k \ : \ \exists k > 0$

الإثبات :

ليكن : $\varepsilon > 0$ .. بما أن $\{f_n(x)\}$ تتقارب بانتظام من $f(x)$ على I فإنه يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

عندما $n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x المنتمية للمجال I .

ليكن $n \geq N_0$ .. بما أن $f_n(x)$ محدود على I فإنه يوجد $k > 0$ بحيث يكون : $|f_n(x)| < k$ من أجل جميع قيم x من المجال I .

ومنه يوجد العدد الحقيقي الموجب $\varepsilon + k > 0$ بحيث يكون :

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < \varepsilon + k$$

وذلك أياً كان $x \in I$

إذاً $f(x)$ محدود على I .. وهو المطلوب .

نتيجة :

إذا كانت لدينا متتالية توابع محدودة وكان تابع النهاية لها غير محدود على المجال المدروس فإن تقاربها من تابع النهاية يكون غير منتظم على المجال المدروس .

" انتهت المحاضرة " ....