ومنه: $\lambda A + \mu B \in W$ وبالتالي W فضاء شعاعي جزئي من V.

تمرين: ليكن $V = \mathbb{R}^4$ فضاء شعاعي معرف على $\mathbb{R}$ أثبت

أن $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = t + z\}$

فضاء شعاعي جزئي في V.

---

١١ / ١١ / ٢٠١٣ المحاضرة السادسة:

مبرهنة: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل F إذا كان W_1, W_2 فضائين شعاعين جزئين في V فإن $W = W_1 \cap W_2$ فضاء شعاعي جزئي في V.

الإثبات: $0 \in W_1$ و $0 \in W_2 \Leftarrow 0 \in W = W_1 \cap W_2$ أي

$$W \neq \emptyset$$

$$\Leftarrow \forall \lambda, \mu \in F, \forall u, v \in W$$

$$\forall \lambda, \mu \in F, v, u \in W_1, u, v \in W_2$$

$$\Rightarrow \lambda u + \mu v \in W_1, \lambda u + \mu v \in W_2$$

ومنه $\lambda u + \mu v \in W = W_1 \cap W_2$ أي W فضاء شعاعي جزئي في V.

ملاحظة: اذا كان W_1 و W_2 فضائين شعاعين جزئين في فضاء V فإنه ليس بالضرورة أن يكون $W_1 \cup W_2$ فضاء شعاعي جزئي في V.

مثال: $V = \mathbb{R}^3$ وكان:

$$W_1 = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3\}$$
$$W_2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$$

ولكن $W_1 \cup W_2$ ليس فضاء شعاعي جزئي في V لأن

$$(1, 1, 1) \notin W_1 \cup W_2$$
$$\parallel$$
$$(1, 0, 1) + (0, 1, 0) \notin W_1 \cup W_2$$
$$(1, 0, 1) \in W_1 \subseteq W_1 \cup W_2$$
$$(0, 1, 0) \in W_2 \subseteq W_1 \cup W_2$$

/ /

تمرين: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل F وليكن W_1 , W_2 فضائين شعاعين جزئيين في V أثبت أن $W_1 \cup W_2$ فضاء شعاعي جزئي في V إذا وفقط إذا كان $W_1 \subseteq W_2$ أو $W_2 \subseteq W_1$

مثال: ليكن V فضاء شعاعي معرف على $\mathbb{R}$: $V = \mathbb{R}^4$

$$W_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y = t-z\}$$
$$W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-y = t+z\}$$

أثبت أن W_1 , W_2 فضاءات شعاعية جزئية في V ثم أوجد الفضاء الشعاعي الجزئي $W = W_1 \cap W_2$

الحل: $W_1 \neq \emptyset \Leftarrow (0,0,0,0) \in W_1$

$$\forall u_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1) , u_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in W_1$$
$$x_1 + y_1 = t_1 - z_1 \quad , \quad x_2 + y_2 = t_2 - z_2$$
$$u_1 + u_2 = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2 , z_1 + z_2 , t_1 + t_2)$$

كما أن: $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (t_1 + t_2) - (z_1 + z_2)$

ومنه: $u_1 + u_2 \in W_1$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} , \forall u = (x,y,z,t) \in W_1$$
$$\lambda . u = (\lambda x , \lambda y , \lambda z , \lambda t)$$
$$\lambda x + \lambda y = \lambda(x+y) = \lambda(t-z) = \lambda t - \lambda z$$

$\Rightarrow \lambda . u \in W_1 \Rightarrow$ W_1 فضاء شعاعي جزئي في V

وبالمثل نجد أن W_2 فضاء شعاعي جزئي في V.

$$\forall u = (x,y,z,t) \in W = W_1 \cap W_2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} u \in W_1 \Rightarrow x + y = t - z \\ u \in W_2 \Rightarrow x - y = t + z \end{cases} \Rightarrow$$

بالجمع: $2x = 2t \Rightarrow \boxed{x = t}$

بالطرح: $2y = -2z \Rightarrow \boxed{y = -z}$

$$W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = t , y = -z\}$$

$$W_1 \cap W_2 = \{(t, -z, z, t) : t, z \in \mathbb{R}\}$$

تقاطع أي فضائين شعاعيين $W_1 \cap W_2 : W$ هو فضاء شعاعي جزئي
ولكن ليس اجتماع أي شعاعين جزئيين: $W = W_1 \cup W_2$ هو فضاء شعاعي جزئي.

/ /

المولدات : تعريف : ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل F ولتكن $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ مجموعة جزئية في V

① نقول إن $v \in V$ تكتب كتركيب خطي لعناصر المجموعة S إذا وفقط إذا وجد عناصر $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$ تحقق

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1} \lambda_i v_i$$

② نعرف مجموعة كل التراكيب الخطية لعناصر S في الفضاء V بالشكل

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \ ; \ \lambda_i \in F, \ v_i \in S \right\}$$

مبرهنة: ليكن V فضاء شعاعي معرف على الحقل F ولتكن $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ مجموعة جزئية في V عندئذ $W = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i : \lambda_i \in F, v_i \in S \right\}$ فضاء شعاعي جزئي في V

الإثبات: من أجل $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ يكون:

$$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \in W \Leftarrow W \neq \emptyset$$

ومنه

$$\forall \lambda, \mu \in F, \ \forall u, v \in W$$

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F : u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

$$\exists \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in F : v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$$

$$\lambda u + \mu v = \lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \mu \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \mu \mu_i v_i$$

نفرض $\alpha_i = \lambda \lambda_i \ , \ \beta_i = \mu \mu_i : \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$\lambda u + \mu v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) v_i$$

نفرض $\alpha_i + \beta_i = \gamma_i$

$$\lambda u + \mu v = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i v_i \in W$$

وبالتالي: W فضاء شعاعي جزئي في V