/ /

وهذا الحل يصلح باستثناء القيم $\lambda \neq \mp 2$

$|\lambda| < \sqrt{2}$ $\qquad |\lambda| < \frac{1}{B} \qquad B^2 = \frac{1}{2}$

ـ المحاضرة الرابعة :

ـ مثال :

لتكن لدينا المعادلة: $\psi(x) = 1 + \lambda \int_0^1 (1 - 3xt)\,\psi(t)\,dt$

أ) أوجد النوى المكررة لـ m ، $K_m(x,t)$

ثم أوجد الحل باستخدام (متسلسلة نيومن).

الحل: $K_1(x,t) = K(x,t) = 1 - 3xt$

$$K_2(x,t) = \int_a^b K_1(x,z)\,.\,K_1(z,t)\,dz$$

$$= \int_0^1 (1 - 3xz)(1 - 3zt)\,dz = \int_0^1 (1 - 3zt - 3xz + 9xtz^2)\,dz$$

$$= \left[z - \frac{3tz^2}{2} - \frac{3xz^2}{2} + \frac{9xtz^3}{3} \right]_0^1$$

$$K_2(x,t) = 1 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}x + 3xt$$

$$K_3(x,t) = \int_a^b K_1(x,z)\,.\,K_2(z,t)\,dz$$

$$= \int_0^1 (1 - 3xz)\left(1 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}z + 3zt\right)dz$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}z + 3zt - 3xz + \frac{9}{2}xzt + \frac{9}{2}xz^2 - 9xz^2t\right)dz$$

$$K_3(x,t) = \left[z - \frac{3}{2} t z - \frac{3}{4} z^2 + \frac{3}{2} z^2 t - \frac{3}{2} x z^2 + \frac{9}{4} x z^2 t + \frac{9}{6} x z^3 - \frac{9}{3} x t z^3 \right]_0^1$$

$$K_3(x,t) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} t x$$

$$= \frac{1}{4} (1 - 3xt)$$

$$\Rightarrow K_3(x,t) = \frac{1}{4} K_1(x,t)$$

$$K_4(x,t) = \int_a^b K_1(x,z) \cdot K_3(z,t) \, dz$$

$$= \int_0^1 (1 - 3xz)\left(\frac{1}{4}\right)(1 - 3zt) \, dz$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 (1 - 3zt - 3xz + 9xtz^2) \, dz$$

$$= \frac{1}{4} \left[z - \frac{3}{2} z^2 t - \frac{3}{2} x z^2 + \frac{9xtz^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} \left[1 - \frac{3}{2} t - \frac{3}{2} x + 3xt \right]$$

$$\Rightarrow K_4(x,t) = \frac{1}{4} K_2(x,t)$$

$$K_5(x,t) = \frac{1}{4} K_3(x,t)$$

$$K_6(x,t) = \frac{1}{4} K_4(x,t)$$

$\vdots$

$$K_m(x,t) = \frac{1}{4} K_{m-2}(x,t)$$

ALGADID.net
الحضارة

الحل بدلالة متسلسلة نيومن: كما نعلم:

$$\psi(x) = h(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b K_m(x,t)\, h(t)\, dt$$

نفك الحدود

$$\psi(x) = 1 + \lambda \int_0^1 (1-3xt)\,dt + \lambda^2 \int_0^1 \left(1 - \tfrac{3}{2}t - \tfrac{3}{2}x + 3xt\right) dt$$

$$+ \frac{\lambda^3}{4} \int_0^1 (1-3xt)\,dt + \frac{\lambda^4}{4} \int_0^1 \left(1 - \tfrac{3}{2}t - \tfrac{3}{2}x + 3xt\right) dt$$

$$+ \cdots$$

$$\psi(x) = 1 + \int_0^1 (1-3xt)\,dt \left[\lambda + \frac{\lambda^3}{4} + \frac{\lambda^5}{4^2} + \cdots\right]$$

$$+ \int_0^1 \left(1 - \tfrac{3}{2}t - \tfrac{3}{2}x + 3xt\right) dt \left[\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{4} + \cdots\right]$$

$$\left(\lambda + \frac{\lambda^3}{4} + \frac{\lambda^5}{4^2} + \cdots\right) = \lambda\Big(1 + \underbrace{\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^4}{4^2} + \cdots}_{\text{هندسية أساسها } \frac{\lambda^2}{4}}\Big)$$

$$\left(\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{4} + \cdots\right) = \lambda^2\Big(1 + \underbrace{\frac{\lambda^2}{4} + \cdots}_{\text{هندسية أساسها } \frac{\lambda^2}{4}}\Big)$$

$$\psi(x) = 1 + \left(1 - \tfrac{3}{2}x\right)\left(\frac{4\lambda}{4-\lambda^2}\right) + \frac{4\lambda^2}{4-\lambda^2}$$

$$\boxed{\psi(x) = \frac{4 + 2\lambda(2-3x)}{4-\lambda^2}} \qquad \lambda \neq \mp 2$$

$$B^2 = \frac{1}{2} \qquad D\left(0, \frac{1}{B}\right)$$

$$|\lambda| < \frac{1}{B} \Rightarrow |\lambda| < \sqrt{2}$$

المتسلسلة الهندسية متقاربة وشرط تقاربها $|\lambda| < 1$

قرص التقارب $D(0,\sqrt{2})$ $\lambda \in D$ وهو محقق لأن المتسلسلة

السابقة هندسية $\lambda < 1$

/ /

مثال : أوجد النوى المكررة $K_m(x,t)$ للمعادلة:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_0^1 x \cdot t \, \psi(t) \, dt$$

- وبين باستخدام العلاقة $|\lambda| < 1$ B فيما إذا كانت متسلسلة نيومن متقاربة أم لا ؟

$$K_1(x,t) = K(x,t) = x \cdot t$$

$$K_2(x,t) = \int_0^1 K_1(x,z) K_1(z,t) \, dz$$

$$= \int_0^1 (x \cdot z)(z \cdot t) \, dz = \int_0^1 x t z^2 \, dz$$

$$= \left[\frac{x t z^3}{3} \right]_0^1 = \frac{x t}{3}$$

$$\Rightarrow K_2(x,t) = \frac{1}{3} (x \cdot t)$$

$$K_2(x,t) = \frac{1}{3} K_1(x,t)$$

$$K_3(x,t) = \int_0^1 K_1(x,z) K_2(z,t) \, dz$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 (x \cdot z)(z \cdot t) \, dz = \frac{1}{3} \int_0^1 x t z^2 \, dz$$

$$= \frac{1}{9} [x t z^3] = \frac{1}{9} x \cdot t$$

$$K_3 = \frac{1}{9} K_1(x,t)$$

$$K_4 = \frac{1}{27} x \cdot t$$

$$\vdots$$

$$K_m = \frac{1}{3^{m-1}} K_1(x,t)$$

ILADIB.net

$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$

/ /

$K_m(x,t) = \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} K_1(x,t)$

$B^2 = \int_0^1\int_0^1 |K(x,t)|^2 \, dx\, dt = \int_0^1\int_0^1 x.t \, dx\, dt$

$= \int_0^1 \left[\frac{x^2.t}{2}\right]_0^1 dt = \int_0^1 \frac{t}{2} dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}|\lambda| < 1 \Rightarrow |\lambda| < 2$ شرط التقارب

مثال: أوجد النوى المكررة لـ: $\psi(x) = 1 + \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+t)\,\psi(t)\,dt$

$K_1(x,t) = K(x,t) = \sin(x+t)$

$K_2(x,t) = \int_0^{\pi} \sin(x+z)\sin(z+t)\,dz$

$= \int_0^{\pi} -\frac{1}{2}\left[\cos(2z+x+t) - \cos(x-t)\right] dz$

$K_2(x,t) = \frac{\pi}{2}\cos(x-t)$

$K_3(x,t) = \int_0^{\pi} K_1(x,z)\,.\,K_2(z,t)\,dz$

$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sin(x+z).\cos(z-t)\,dz$

$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[\sin(x-t+2z) + \sin(z+t)\right] dz$

$= \frac{\pi}{4}\left[\int_0^{\pi} \sin(x-t+2z)\,dz + \int_0^{\pi} \sin(z+t)\,dz\right]$

ALADIB.net

/ /

$$= \frac{\pi}{4}\left[-\frac{\cos(x-t+2z)}{2} + \cos(z+t) \right]_0^{\pi}$$

$$K_3(x,t) = \frac{\pi^2}{4} K_1(x,t) = \frac{\pi^2}{2^2} K_1(x,t)$$

$$K_4(x,t) = \frac{\pi^2}{4} K_2(x,t) = \frac{\pi^2}{2^2} K_2(x,t)$$

$$K_5(x,t) = \frac{\pi^4}{2^4} K_1(x,t)$$ بالحساب

- المحاضرة الخامسة :

- النواة الحالة :

الحد العام :

$$K_1(x,t) + \lambda K_2(x,t) + \lambda^2 K_3(x,t) + \lambda^3 K_4(x,t) + \lambda^4 K_5(x,t) + \cdots + \lambda^{m-1} K_m(x,t), \cdots = R(x,t,\lambda)$$

- متسلسلة قوى غير منتهية بـ λ.

R تسمى بالنواة الحالة لـ $K(x,t)$ وهي تمثل دالة تحليلية.

نعلم أن :

$$K_m(x,t) = \int_a^b K_{m-1}(x,z)\, K_1(z,t)\, dz$$

لنطبق متراجحة شفارتز :

$$|K_m(x,t)|^2 \leq \int_a^b |K_{m-1}(x,z)|^2 dz \cdot \int_a^b |K_1(z,t)|^2 dz$$

نفرض :

$$\text{let: } C_0^2 = \sup_t \int_a^b |K_1(z,t)|^2 dz$$
$$C_{m-1} = \sup_t \int_a^b |K_{m-1}(x,z)|^2 dz$$

ALANOID.net