المحاضرة العاشرة.   ٢١ / ١١ / ٢٠١٣

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة $\Longleftarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

المعيار الصفري لحد وليس ونقط

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \Leftarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

$\Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ متباعدة حسب المعيار الصفري؟

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{3n^2+1} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{3n^2+1} = \frac{2}{3} \neq 0$

$\Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{3n^2+1}$ متباعدة حسب المعيار الصفري.

انتهت المحاضرة

المحاضرة العاشرة.   ٢١-١١-٢٠١٣

معايير التقارب:

* - تعريف التقارب.
١- المعيار الصفري. ٢- معيار المقارنة ٣- معيار نهاية النسبة
٤- معيار النسبة (دالامبير) ٥- معيار الجذر النوني (كوشي).
٦- معيار راب. ٧- معيار التكامل (كوشي التكاملي).

تعريف التقارب:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة $\Longleftrightarrow \exists S \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} S_n = S$
$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ؟

١) المعيار الصفري: اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فإن نهاية الحد العام لها يساوي الى الصفر $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

أو:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Longleftarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

المكافئ العاكس:

ملاحظة بالعكس: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة ((المعيار الصفري يحدد فقط التباعد)).

البرهان: بما أن $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فإن متتالية المجاميع الجزئية لها متقاربة أي أن: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$

ولكن:

$$\left.\begin{array}{l} S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \end{array}\right\} \text{ بالطرح}$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1})$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = S - S = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

ملاحظة: إضافة عدد محدود من العناصر إلى متتالية أو حذفها لا يؤثر على تقارب أو تباعد المتتالية.

مثال: ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلات:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+5}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} \cdot 3^{n-1}}{5^{n-1}}$

الحل:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+5} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^2+5}$

متباعدة حسب المعيار الصفري.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

متباعدة حسب المعيار الصفري.

/ /

3: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ هندسية $\sum_{n=1}^{\infty} (r)^{n-1}$

$|r| = \left|\frac{2}{3}\right| < 1$ فهي متقاربة

«هندسية متقاربة» لإيجاد مجموعها :

$S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$

4: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ هندسية

$|r| = |-1| = 1 \geq 1$ فهي متباعدة.

5: $\sum_{n=1}^{\infty} (2)^{n-1}$ هندسية

$|r| = |2| > 1 \Rightarrow$ فهي متباعدة.

6: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} \cdot 3^{n-1}}{5^{n-1}} = \frac{6^{n-1}}{5^{n-1}} = \left(\frac{6}{5}\right)^{n-1}$ فهي هندسية

$\left|r\right| = \left|\frac{6}{5}\right| > 1$ فهي متباعدة.

٢) : معيار المقارنة : اذا كان لدينا المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$: $a_n \geq 0$ ، $b_n \geq 0$

وكان $a_n \leq b_n$ من $n \geq n_0 \in N$

فإن :

① : اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة $\xLeftarrow{\text{فإن}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة

② : اذا كانت $\sum a_n$ متباعدة $\Longleftarrow$ $\sum b_n$ متباعدة

٣) : معيار نهاية النسبة : اذا كانت المتسلسلتان $\sum a_n$ ، $\sum b_n$: $a_n \geq 0$ و $b_n \geq 0$ وكانت

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ فإن :

① : اذا كانت $c > 0$ فإن المتسلسلتان من نوع واحد (إما متقاربتان أو متباعدتان).

٢): اذا كانت $c = 0$ فإنه اذا كانت $\sum b_n$ متقاربة $\Leftarrow$ $\sum a_n$ متقاربة

٣): اذا كانت $c = +\infty$ فإنه اذا كانت $\sum b_n$ متباعدة $\Leftarrow$ $\sum a_n$ متباعدة

٤): معيار النسبة (دالامبير): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: $a_n \geq 0$ وكانت

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

نستخدم اذا وجد $n!$ أو رمزي الأس

١): اذا كانت $L < 1$ فإن $\sum a_n$ متقاربة.

٢): اذا كانت $L > 1$ فإن $\sum a_n$ متباعدة.

٣): اذا كانت $L = 1$ فإن المعيار يفشل في تحديد نوع المتسلسلة

٥): معيار الجذر النوني: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: $a_n \geq 0$ وكانت $R = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$

فإن:

١): $R < 1 \Rightarrow \sum a_n$ متقاربة.

٢): $R > 1 \Rightarrow \sum a_n$ متباعدة.

٣): $R = 1$ يفشل المعيار.

يستخدم اذا كانت المتسلسلة مرفوعة للأس n.

٦): معيار رابي: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: $a_n \geq 0$; $W = \lim_{n \to \infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$

فإن:

١): $W > 1 \Rightarrow \sum a_n$ متقاربة

٢): $W < 1 \Rightarrow \sum a_n$ متباعدة.

٣): $W = 1 \Rightarrow$ يفشل المعيار.

اذا لم ينفع معيار النسبة نستخدم (رابي)

٧): معيار التكامل: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: $a_n \geq 0$ (موجبة)

$f(x) = a_n$ نأخذ الدالة المستمرة $f(x) \geq 0$ على المجال $[1, +\infty[$ أو جزء منه فإذا كانت $f(x)$ دالة متناقصة على $[1, \infty[$ فإن

$\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ من نوع واحد.

من نوع اذا كان التكامل متقارب أو متباعد
$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b f(x)\,dx = S \;:\; \exists\, S\in\mathbb{R}$
تكون متقاربة

تمرين: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \longrightarrow \int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$

$p<1$ متباعدة ، $p>1$ متقاربة ، $p=1$ متباعدة

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p} \longrightarrow \int_2^{\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$

أمثلة: بين نوع المتسلسلات متقاربة أم متباعدة:

$\boxed{1}: \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{\beta n+\gamma} : \frac{\alpha}{\beta}>0$, $\boxed{2}: \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$

$\boxed{3}: \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot 2^n}$ $\boxed{4}: \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$\boxed{5}: \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$

الحل: ② : إن: $2^n < n2^n$ نأخذ المقلوب:
$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} > \frac{1}{n\cdot 2^n}$

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ هندسية فيها $r=\frac{1}{2}<1$ فهي متقاربة
ما يؤدي الى أن $\sum\frac{1}{n\cdot 2^n}$ متقاربة حسب معيار المقارنة

① : نأخذ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $C=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\alpha}{\beta n+\gamma}}{\frac{1}{n}}$

$C=\lim\frac{\alpha n}{\beta n+\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}>0$

المتسلسلتان من نوع واحد $\sum\frac{1}{n}$ متباعدة (بداية)
$p=1 \Leftarrow \sum\frac{\alpha}{\beta n+\gamma}$ متباعدة حسب معيار النهاية