المستوي:

تعريف المستوي: يعرف المستوي بأنه سطح غير محدود يتوارد إلى الأذهان بأنه شكل من الأشكال الهندسية يتعين المستوي بأكثر من طريقة نذكر منها:

1) مستقيم ونقطة خارجة عنه.
2) ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة.
3) مستقيمين متقاطعين أو متوازيين.

إيجاد معادلة المستوي:

1) إيجاد معادلة مستوي يمر من نقطة معلومة ويعامد شعاع معلوم
لتكن النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ وليكن الشعاع $\vec{v}(p,q,r)$ ولتكن لدينا النقطة $M(x,y,z)$ نقطة متحولة في المستوي المطلوب
عندئذ لتكن يجب أو يكفي النقطة M تحقق العلاقة التالية

$$\overrightarrow{MM_0} \perp \vec{v} \iff \vec{v}\cdot\overrightarrow{MM_0}=0 \iff$$

$$\vec{v} = p\vec{i}+q\vec{j}+r\vec{k}$$

$$\overrightarrow{MM_0} = (x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k}$$

$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{MM_0} = p(x-x_0)+q(y-y_0)+r(z-z_0)$$

$$= px+qy+rz-(px_0+qy_0+rz_0)=0$$

نرمز لـ $-(px_0+qy_0+rz_0)$ بـ h وبالتالي يكون:

$$px+qy+rz+h=0$$

وتكون معادلة المستوي من الشكل:

$$\{Q(x,y,z)=px+qy+rz+h=0\}$$

$\vec{v}$ عمودي على المستوي ونسميه ناظم المستوي ونرمز له بـ $\vec{N}(p,q,r)$

مثال: أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $M_0(-1,2,3)$ ويعامد الشعاع $\vec{N}(-1,5,2)$

$$Q(x,y,z)=-x+5y+2z+h=0$$

ولكن $h=-(1+10+6)=-17$

ومعادلة المستوي المطلوبة:

$$\{Q(x,y,z)=-x+5y+2z-17=0\}$$

المعادلة الناظمية للمستوي:

لإيجاد المعادلة الناظمية للمستوي بدلالة جيوب تمام توجيه الناظم نقسم طرفي المعادلة ⊛ على طويلة الناظم فنحصل على:

$$px + qy + rz + h = 0 \quad ⊛$$

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}x + \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}y + \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}z + \frac{h}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = 0$$

وتكون المعادلة بدلالة جيوب تمام توجيه الناظم

$$\boxed{\alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0}$$

و d يمثل بعد مبدأ الإحداثيات عن المستوي Q. اذا كان h الحد الثابت كالتالي:

$h < 0$ نقسم على $-\sqrt{p^2+q^2+r^2}$

$h > 0$ نقسم على $+\sqrt{p^2+q^2+r^2}$

حالات خاصة لمعادلات المستوي:

نأخذ المعادلة ⊛ ولنأخذ الحالات الخاصة التالية:

$$px + qy + rz + h = 0$$

1) اذا كان $h=0$ نحصل على معادلة مستوي يمر بمبدأ الإحداثيات

2) اذا كانت $p=0$ فالمعادلة تصبح $qy + rz + h = 0$ وناظمه $\overrightarrow{N}(0, q, r)$ ونحصل على مستوي يوازي المحور ox لأن ناظمه الناظم هذا المستوي يعامد المحور ox ويكون $\overrightarrow{OM}(1,0,0)$

و $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{OM} = 0$

3) اذا كان $q=0$ نحصل على معادلة مستوي يوازي oy

4) اذا كان $r=0$ نحصل على معادلة مستوي يوازي المحور oz.

5) اذا كان $p=q=0$ نحصل على $rz + h = 0$ وهي معادلة مستوي يوازي المستوي xoy

6) اذا كان $p=r=0$ نحصل على معادلة مستوي يوازي المستوي xoz

7) اذا كان $q=r=0$ نحصل على المعادلة المستوي يوازي المستوي yoz

ملاحظة: في الحالات (7,6,5): اذا كان الحد الثابت $d=0$ فان المستوي يمر بالمبدأ في معادلات المستويات الإحداثية.

- معادلة مستوي يمر من نقطة معلومة ويوازي شعاعين معلومين:

لتكن لدينا النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ نقطة معلومة والشعاعين $\vec{V_1}(p_1,q_1,r_1)$ والشعاع $\vec{V_2}(p_2,q_2,r_2)$ شعاعين معلومين والمطلوب ايجاد معادلة المستوي المار من النقطة M_0 والموازي للشعاعين $\vec{V_1}, \vec{V_2}$.

يمكن رد هذه المسألة للحالة الأولى وذلك لأن ناظم المستوي المطلوب يعامد مستوي الشعاعين $\vec{V_1}, \vec{V_2}$ ولإيجاد شعاع عمودي على كل من $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ نأخذ الجداء الخارجي لهما $\Leftarrow$ $\vec{N}=(\vec{V_1}\wedge\vec{V_2})$

$$\vec{N}=(\vec{V_1}\wedge\vec{V_2})=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}$$

$$=(q_1r_2-r_1q_2)\vec{i}+(p_1r_2-\cancel{r_2}p_2)\vec{j}+(p_1q_2-q_1p_2)\vec{k}$$

$$\vec{N}=(q_1r_2)-r_1q_2)\vec{i}+(p_1r_2)-\cancel{r}r_1p_2)\vec{j}+(p_1q_2-q_1p_2)\vec{k}$$

- نوجد نقطة متحولة في المستوي المطلوب $M(x,y,z)$ ونحصل على المعادلة كما في الحالة السابقة.

تمرين: أوجد معادلة مستوي يمر بالنقطة $M_0(1,2,3)$ ويوازي $\vec{V_1}(1,0,2)$ و $\vec{V_2}(0,3,5)$. *

ان ناظم المستوي المطلوب يعامد مستوي الشعاعين $\vec{V_1}, \vec{V_2}$ ولإيجاده نأخذ الجداء الخارجي للشعاعين $\vec{N}=\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}$

$$\vec{N}=(\vec{V_1}\wedge\vec{V_2})=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}=-6\vec{i}-5\vec{j}+3\vec{k}$$

$\vec{N}(-6,-5,+3)$

$M_0(1,2,3)$

معادلة مستوي يمر بثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة:

لتكن لدينا النقاط $M_1(x_1,y_1,z_1)$، $M_2(x_2,y_2,z_2)$، $M_3(x_3,y_3,z_3)$ ثلاث نقاط معلومة، المطلوب: إيجاد معادلة مستوي يحوي النقاط الثلاثة.

نأخذ نقطة M تنتمي للمستوي المطلوب ونأخذ الشعاع:

$$\vec{N} = (\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_2})$$

$$\overrightarrow{MM_1} \cdot \vec{N} = 0$$

$$\overrightarrow{MM_1} \cdot (\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$$

أي أنها المحدد، التي نحصل على المعادلة التالية:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$$

مثال: أوجد معادلة مستوي يمر من النقاط: $M(3,1,-1)$ ، $M_2(2,1,-1)$ ، $M_3(1,2,1)$

إيجاد معادلة مستوي يمر من نقطتين معلومتين ويوازي شعاع معلوم:

لدينا $M_1(x_1,y_1,z_1)$ و $M_2(x_2,y_2,z_2)$ نقطتان معلومتان ولدينا الشعاع $\vec{U}(a,b,c)$ شعاع معلوم، المطلوب أوجد معادلة مستوي يمر بالنقطتين M_2 و M_1 ويوازي $\vec{U}$. نفرض النقطة M نقطة مجهولة في المستوي المطلوب عند كل وجميع أوضاع النقطة M يكون المستوي المطلوب يوازي الشعاعين $\overrightarrow{M_1M}$، $\vec{U}$ إذاً ردت المسألة إلى الحالة السابقة إيجاد معادلة مستوي يمر من نقطة ويوازي شعاعين وبالتالي نحصل على $\vec{N} = \vec{U} \wedge \overrightarrow{M_1M}$

/ /

الزاوية بين مستويين: ليكن لدينا المستويين:

$$Q_1(x,y,z) = P_1x + q_1y + r_1z + R_1 = 0 \quad \overrightarrow{N_1}(P_1, q_1, r_1)$$

$$Q_2(x,y,z) = P_2x + q_2y + r_2z + R_2 = 0 \quad \overrightarrow{N_2}(P_2, q_2, r_2)$$

اذا كان المستويان متقاطعان فإن تقاطعهما يشكل أربع زوايا ثنائية قياس احدى هذه الثنائيات تساوي الزاوية الكائنة بين ناظمي المستويين.

ان متجه ناظم المستوي الأول هو $\overrightarrow{N_1}$ ومتجه ناظم المستوي الثاني هو $\overrightarrow{N_2}$، والزاوية بين الناظمين نفرضها Q عندئذ نجد أن

$$\cos Q = \frac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}| \cdot |\overrightarrow{N_2}|} \Rightarrow$$

$$\cos Q = \frac{P_1P_2 + q_1q_2 + r_1r_2}{\sqrt{P_1^2+q_1^2+r_1^2} \cdot \sqrt{P_2^2+q_2^2+r_2^2}} \quad (**)$$

ان المقدار الموجود في البسط في الطرف الأيمن من العلاقة هو مقدار جبري فإشارته إما موجبة أو سالبة فإذا كانت الإشارة موجبة فالزاوية بين الناظمين حادة وإذا كانت سالبة فالزاوية بين المستويين منفرجة ولما أننا نعتبر الزاوية بين ~~مستويين~~ مستقيمين هي الزاوية الأصغر قياساً لذلك يجب أن يكون هذا المقدار موجباً أي يجب أن تكون Q حادة وعليه تعطى الزاوية بين مستويين

$$\cos Q = \frac{|P_1P_2 + q_1q_2 + r_1r_2|}{\sqrt{P_1^2+q_1^2+r_1^2} \cdot \sqrt{P_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

اذا كان الطرف الأيمن للعلاقة (**) يساوي الصفر ⇐ المستويان متعامدان ونحصل على الشرط اللازم والكافي لتعامد مستويين هو تحقق العلاقة التالية

$$P_1P_2 + q_1q_2 + r_1r_2 = 0$$

$$Q_1 \perp Q_2 \Longleftrightarrow \overrightarrow{N_1} \perp \overrightarrow{N_2} \Longleftrightarrow P_1P_2 + q_1q_2 + r_1r_2 = 0$$

شرط التعامد

$$Q_1 \parallel Q_2 \Longleftrightarrow \overrightarrow{N_1} \parallel \overrightarrow{N_2} \Longleftrightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$ شرط التوازي

/ /

معادلة مستوي يقطع المحاور الإحداثية:

ص يقطع المستوي ox يجب أن يكون $y=z=0$ أي

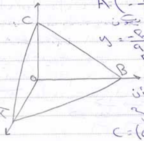
أن $px+s=0 \Leftarrow x=-\frac{s}{p}$

وتكون احداثيات $A\left(-\frac{s}{p},0,0\right)$

ص يقطع المستوي oy يجب أن يكون

$x=z=0$ أي أن $qy+s=0 \Leftarrow y=-\frac{s}{q}$

وتكون احداثيات $B=\left(0,-\frac{s}{q},0\right)$



ص يقطع المستوي

oz يجب أن يكون $x=y=0$ أي أن

$rz+s=0 \Leftarrow z=-\frac{s}{r}$

وتكون احداثيات $C=\left(0,0,-\frac{s}{r}\right)$

وبالتالي تحولت المسألة إلى إيجاد معادلة مستوي يمر من ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة. ولذلك نفرض M نقطة متحولة من المستوي المطلوب. لنأخذ المتجهات

$\overrightarrow{AM}(x-a,y,z)$

$\overrightarrow{AB}(-a,b,0)$

$\overrightarrow{AC}(-a,0,c)$

وبالتالي فإن المعادلة التي نبحث عنها ما هي إلا المعادلة الناتجة عن فك المحدد التالي:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -b & 0 & c \end{vmatrix}=0$$

$$(x-a)bc+yac+zab=0$$

$$xbc+yac+zab-abc=0 \quad \div abc$$

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$$

وتكون النقاط A,B,C نقاط تقاطعه مع المحاور الإحداثية