في المحاضرة السابقة ذكرنا أنه نصف قطر المقاربة لمتسلسلة القوى يعطى بالقانون التالي :

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

وسوف نورد الآن كيف تم التوصل لهذا القانون

$$0 \le R \le \infty$$

انطلاقاً من دستور دلامبير المعطى بالعلاقة :

$$D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

وبتعويض الشكل المختزل لمتسلسلة القوى في علاقة دلامبير نجد أن :

$$D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-\alpha)^{n+1}}{a_n(x-\alpha)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\cancel{(x-\alpha)^n}.(x-\alpha)^1}{a_n\cancel{(x-\alpha)^n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\times(x-\alpha)\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\times|x-\alpha|$$

$$= |x-\alpha|\times\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

ونعلم أنه $D < 1$ هو شرط التقارب وبالتالي :

$$|x-\alpha|\times\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

$$\Rightarrow |x-\alpha| < \boxed{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R}$$

و هو المطلوب .

ـ منطقة التقارب لمتسلسلة القوى :

هي مجموعة (جميع) قيم x التي تجعل هذه المتسلسلة متقاربة كمتسلسلة عددية .

$$x = \alpha + R \implies \sum a_n (\alpha + R - \alpha)^n = \sum a_n . R^n$$

$$x = \alpha - R \implies \sum a_n (\alpha - R - \alpha)^n = \sum a_n (-1)^n R^n$$

نتيجة :

إن منطقة التقارب للمتسلسلة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \alpha)^n$$

هي كما يلي :

عندما : $R = +\infty \Longleftarrow I =]-\infty, +\infty[$ وإن : I منطقة التقارب .

عندما : $R = 0 \Longleftarrow I = [\alpha, \alpha]$ وإن : I منطقة التقارب .

وعندما : $0 < R < +\infty \Longleftarrow$ منطقة التقارب هي إحدى الحالات الأربع التالية :

$$]\alpha - R, \alpha + R[\;,\; [\alpha - R, \alpha + R] \;,\; [\alpha - R, \alpha + R[\;,\;]\alpha - R, \alpha + R]$$

ـ يرمز لمجموع متسلسلة القوى

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \alpha)^n$$

على مجال تقاربها بالرمز : $S(x)$

وبالتالي يمكننا أن نكتب :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \alpha)^n$$

على مجال التقارب $(\forall x \in I)$

تعريف :

يقال عن تابع مثل $f(x)$ أنه قد نشر في متسلسلة قوى مركزها α إذا وفقط إذا أمكن كتابة هذا التابع كمجموع لمتسلسلة القوى على مجال واقع داخل مجال التقارب .

ملاحظة :

1) ـ نشر تابع في متسلسلة يعني كتابة هذا التابع كمجموع لهذه المتسلسلة .
2) ـ نشر تابع في متسلسلة قوى مركزها α يعني كتابة هذا التابع كمجموع لهذه المتسلسلة .
3) ـ نشر تابع بجوار α يعني كتابة هذا التابع على شكل مجموع متسلسلة قوى مركزها α .
4) ـ نشر تابع بحسب قوى $(x-\alpha)$ يعني كتابة هذا التابع على شكل مجموع متسلسلة قوى مركزها α .

أمـثـلـة :

1- أوجد مجال التقارب للمتسلسلة :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n!)\,.\,x^n$$

الحل :

هذه متسلسلة قوى أمثالها : $a_n = n!$ حيث : $n = (0,1,2,\dots\dots)$

ومركزها هو : $\alpha = 0$,, ومنه :

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1).\,n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

إذاً مجال التقارب هو : $I = [0]$

2- أوجد مجال التقارب للمتسلسلة :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+7)^n}{n!}$$

الحل :

هذه متسلسلة قوى أمثالها : $a_n = \frac{1}{n!}$,, ومركزها هو : $\alpha = -7$

ومنه :

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

إذاً مجال التقارب هو : $I=]-\infty,+\infty[$

3- أوجد مجال التقارب للمتسلسلة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(x-5)^n$$

الحل :

هذه متسلسلة قوى أمثالها : $a_n=n$,, ومركزها هو : $\alpha=5$

ومنه :

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|=1$$

إذاً مجال التقارب هو : $I=]\alpha-1.R,\alpha+1.R[$

ولدينا $\alpha=5$ وبالتالي مجال التقارب للمتسلسلة المدروسة هو : $I=]4,6[$

نشر التوابع :

- ليكن $f(x)$ تابعاً قابلاً للإشتقاق عدداً غير منته من المرات بجوار نقطة كـ : α

عندئذٍ توجد متسلسلة القوى الآتية :

$$f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+\cdots+\frac{f^n(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n+\cdots$$
$$=\sum\frac{f^n(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

وتدعى هذه المتسلسلة بمتسلسلة تايلور بجوار النقطة α .

$$\Longrightarrow S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^{n}$$

$$S(x)=f(x)$$

بشرط وجود عدد حقيقي موجب مثل k بحيث يكون : $|f^{n}(x)|<k\,,(\forall n\in N)$

تمرين :

انشر (بجوار الصفر) التابع :

$$f(x)=\sin x$$

الحل :

تذكرة :

لدينا القانونان : $\begin{cases}(cosx)^{n}=\cos(x+n\frac{\pi}{2})\\(sinx)^{n}=\sin(x+n\frac{\pi}{2})\end{cases}$

$$f(x)=\sin x\longrightarrow f(0)=0$$

$$f'(x)=\cos x\longrightarrow f'(0)=1$$

$$f''(x)=-\sin x\longrightarrow f''(0)=0$$

$$f'''(x)=-\cos x\longrightarrow f'''(0)=-1$$

$$f''''(x)=\sin x\longrightarrow f''''(0)=0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

الحد العام لمتسلسلة تايلور

$$|(\sin x)^{n}|=\left|\sin\left(x+n.\frac{\pi}{2}\right)\right|\leq 1<2=k\quad,\forall(n\in N)$$

حيث : k=2 قيمة ما مفروضة لإتمام المثال وليست 2 تحديداً

ومنه :

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \mp \cdots + (-1)^n . \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in R =]-\infty, +\infty[$$

التأكد من مجال التقارب :

$$a_n = (-1)^n . \frac{1}{(2n+1)!}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \times \frac{(2n+3)!}{(-1)^{n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}{(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty} 4n^2 + 10n + 6 = \infty$$

وبالتالي مجال التقارب هو : $I =]-\infty, +\infty[$

... انتهت المحاضرة (5) ...