$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ سلسلة ديماتية $p=2$ فهي متقاربة

(أو) نأخذ: $\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum \frac{1}{n^2+n} = 1$

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2} = 1 > 0$$

---

٢٠ / ١١ / ٢٠١٣ تحليل (١١١) عملي المحاضرة الثانية

١). أثبت أن: $n! < n^n$ من أجل $n \geq 2$

- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=2 \Leftarrow$ $I_1 < I_2$

$I_1 = (2)! = 2\times 1 = 2$

$I_2 = 2^2 = 4$ $\Rightarrow$

والعلاقة صحيحة من أجل $n=2$

- نفرض صحة العلاقة من أجل $n=k \Leftarrow$ ⊛ $k! < k^k$ صحيحة.

- نثبت صحة القضية من أجل $n=k+1 \Leftarrow$ $(k+1)! < (k+1)^{(k+1)}$

$$I_1 = (k+1)! = (k+1)(k!) < (k+1)\cdot k^k < (k+1)(k+1)^k$$

$$k^k < (k+1)^k$$

أ العدد الطبيعي أصغر من العدد الطبيعي الذي يليه.

$$= (k+1)^{(k+1)} = I_2$$

والقضية صحيحة من أجل $n=k+1$ مما سبق نستنتج أن القضية صحيحة أياً كانت $n \geq 2$.

ما الذي نريد فهمه من التقارب وتعريف التقارب:

«نستطيع جعل جميع حدود المتتالية أن تقترب من النهاية بالقدر الذي نشاء».

تعريف نهاية متتالية:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon \forall n > N_\varepsilon \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

تمرين: أثبت أن:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{4n+5} = \frac{3}{4}$$

باستخدام (ε, N)

الحل: $|u_n - a| = \left|\frac{3n-1}{4n+5} - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{4(3n-1)-3(4n+5)}{16n+20}\right|$

$$= \left|\frac{12n-4-12n-15}{16n+20}\right| = \left|\frac{-19}{16n+20}\right| = \frac{19}{16n+20}$$

نكبر البسط

$$\frac{19}{16n+20} < \frac{32}{16n} = \frac{2}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$$

نصغر المقام

$$\Rightarrow \boxed{n > \frac{2}{\varepsilon}}$$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] : \left|\frac{3n-1}{4n+5} - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon$

لأجل كل $n > N_\varepsilon$

أثبت أن: $\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^p} = 0$ حيث $p > 0 \, , c \neq 0$

« p, c ثوابت حقيقية لا تتعلق بـ n ».

الحل: $|u_n - a| = \left|\frac{c}{n^p} - 0\right| = \left|\frac{c}{n^p}\right|$

$$= \frac{|c|}{n^p} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n^p}{|c|} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n^p > \frac{|c|}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \sqrt[p]{n^p} > \sqrt[p]{\frac{|c|}{\varepsilon}} \Rightarrow n > \sqrt[p]{\frac{|c|}{\varepsilon}}$$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon = \left[\sqrt[p]{\frac{|c|}{\varepsilon}}\right] : \left|\frac{c}{n^p} - 0\right| < \varepsilon$

لأجل كل $n > N_\varepsilon$.

أثبت أن: $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n} = \frac{2}{3}$

الحل:

$$|u_n - a| = \left|\frac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{3+6\cdot 10^n - 10 - 6\cdot 10^n}{15\cdot 9\cdot 10^n}\right|$$

$$= \left|\frac{-7}{15+9\cdot 10^n}\right| = \frac{7}{15+9\cdot 10^n} < \frac{9}{9\cdot 10^n} = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow 10^n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \log 10^n > \log\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \log\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon = \left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right] : \left|\frac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$$