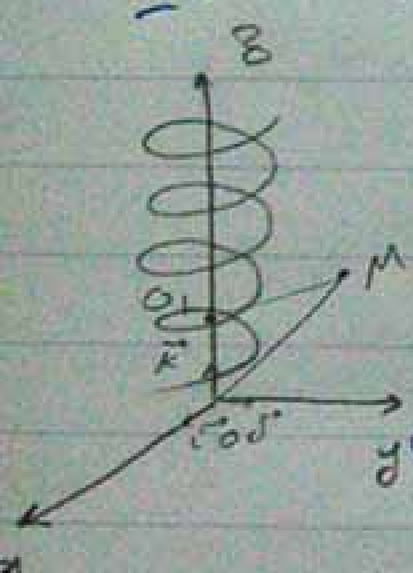
الحركة اللولبية للجسم الصلب

تعريف :
هي حركة جسم صلب ينسحب فيه مستقيم محدد D من الجسم على مستقيم ثابت محدد D_1 و بحيث ترسم كل نقطة منه لولباً دائرياً.
أي أنها حركة جسم صلب يستطيع الدوران حول محور ثابت والانسحاب على هذا المحور
مبدئياً لدينا وسيطين للحركة : زاوية الدوران وهي θ والانسحاب s ولكن نعلم أن اللولب الدائري يتميز بخاصية أن جميع النقاط تنسحب بمقدار يتناسب مع زاوية الدوران أي أن :

$$s = b\theta$$

حيث b : هي الخطوة المختزلة للولب
θ : زاوية الدوران .
وبالتالي أصبح لدينا وسيط واحد للحركة أي درجة واحدة من الحرية



ملاحظة :
إذا دار الجسم دورة كاملة عندئذٍ :

$$s = b(2\pi) = B \ (\text{خطوة اللولب})$$

إن مسارات النقاط هي لوالب دائرية متساوية الخطى

تعيين شعاع الموضع : $\theta = \theta(t)$

حركة مترابطة

$$\forall M \in S : \overrightarrow{O_1M} = \underset{\text{مقدار الانسحاب}}{\overrightarrow{O_1O}} + \overrightarrow{OM}$$

$$= s\vec{k} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

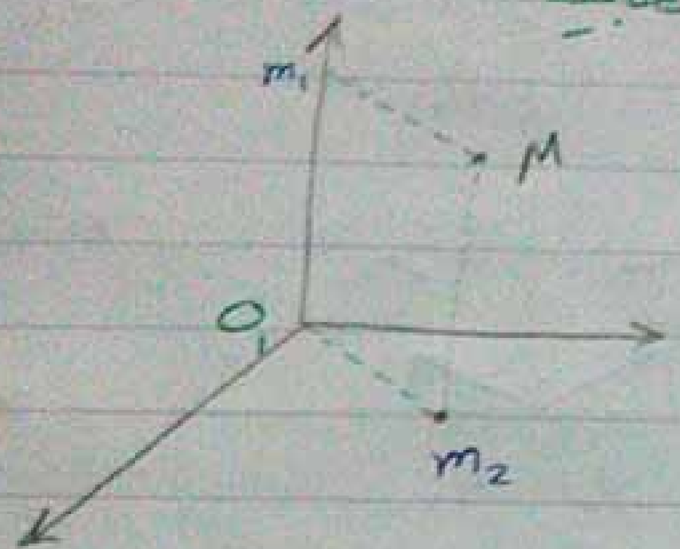
$$= b\theta\vec{k} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$= x\vec{i} + y\vec{j} + (z + b\theta)\vec{k}$$

توزع السرع :

$\forall M \in S : \vec{V}(M) = \vec{V}(m_1) + \vec{V}(m_2)$

انسحابية   دورانية



$= \dot{S}\vec{k} + \vec{\omega} \wedge \vec{O_1m_2}$

$= b\dot{\theta}\vec{k} + \vec{\omega} \wedge \vec{O_1m_2}$

$= b\vec{\omega} + \omega \wedge O_1m_2$

$= b\vec{\omega} + \vec{\omega} \wedge [\vec{O_1M} + \vec{Mm_2}]$

$= b\vec{\omega} + \vec{\omega} \wedge \vec{O_1M} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{Mm_2}}_{=0}$

$\vec{\omega} \parallel \vec{Mm_2}$

$\rightarrow \boxed{\vec{V}(M) = b\vec{\omega} + \vec{\omega} \wedge \vec{O_1M}}$

حيث :

M في مسقط

$\vec{\Gamma}(M) = \dot{\vec{V}}(M) = b\vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{O_1M} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M)$

$= b\vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{O_1M} - \omega^2 \vec{O_1M}$

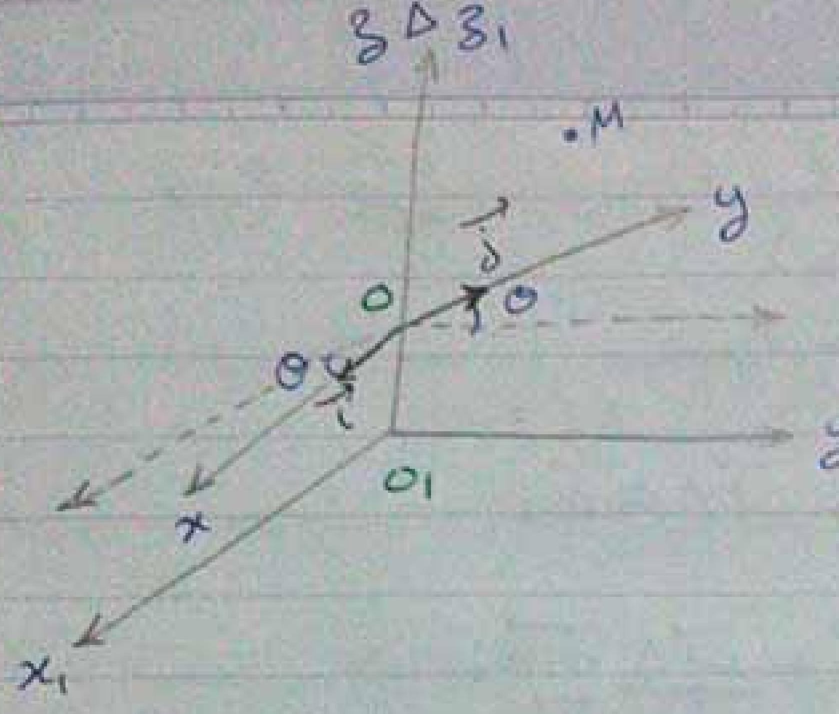
ناظمي   مماسي   تسارع انسحابي

الدراسة التحليلية :

نختار جملتين $O_1x_1y_1z_1$ جملة ثابتة بحيث ينطبق المحور O_1z_1 على محور الدوران ونختار الجملة المتماسكة مع الجسم $Oxyz$ بحيث ينطبق المحور Oz على محور الدوران

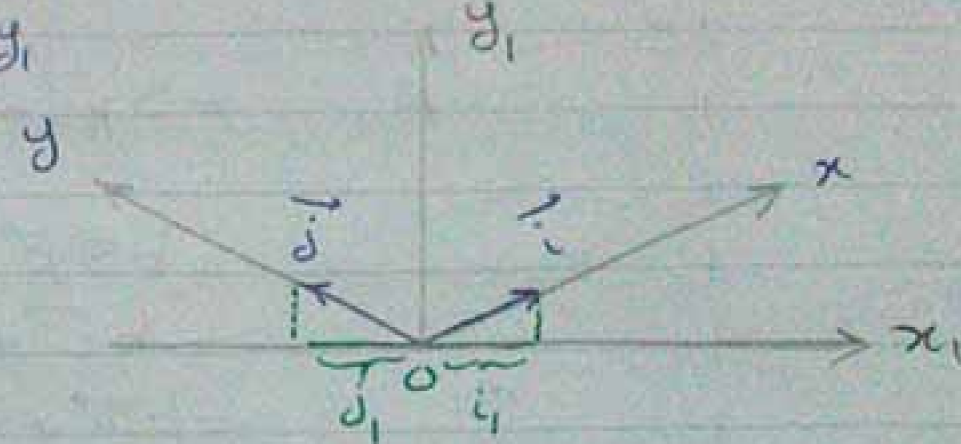
في الجملة المتماسكة $\vec{O_1M} = x\vec{i} + y\vec{j} + (z + b\theta)\vec{k}$

ثوابت x, y, z ، $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ متغيرة



$$\vec{i} = \cos\theta\,\vec{i_1} + \sin\theta\,\vec{j_1}$$

$$\vec{j} = -\sin\theta\,\vec{i_1} + \cos\theta\,\vec{j_1}$$



$$\vec{k_1} = \vec{k}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{O_1M} = (x\cos\theta - y\sin\theta)\vec{i_1} + (x\sin\theta + y\cos\theta)\vec{j_1} + (z + b\theta)\vec{k_1}$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y_1 &= x\sin\theta + y\cos\theta \\ z_1 &= z + b\theta \end{aligned}\right\}$$

مركبات M على الجملة الثابتة.

$$\vec{V}(M) = b\vec{\omega} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$= b\omega\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z + b\theta \end{vmatrix} = -y\omega\vec{i} + \omega x\vec{j} + b\omega\vec{k}$$

$$\vec{V}(M) = b\omega\vec{k_1} + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

على الثابتة

$\vec{\omega} \wedge \vec{V}(M)$

التسارع على المتماسكة:

$$\vec{\Gamma}(M) = b\varepsilon\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z+b\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ V_x(M) & V_y(M) & V_z(M) \end{vmatrix}$$

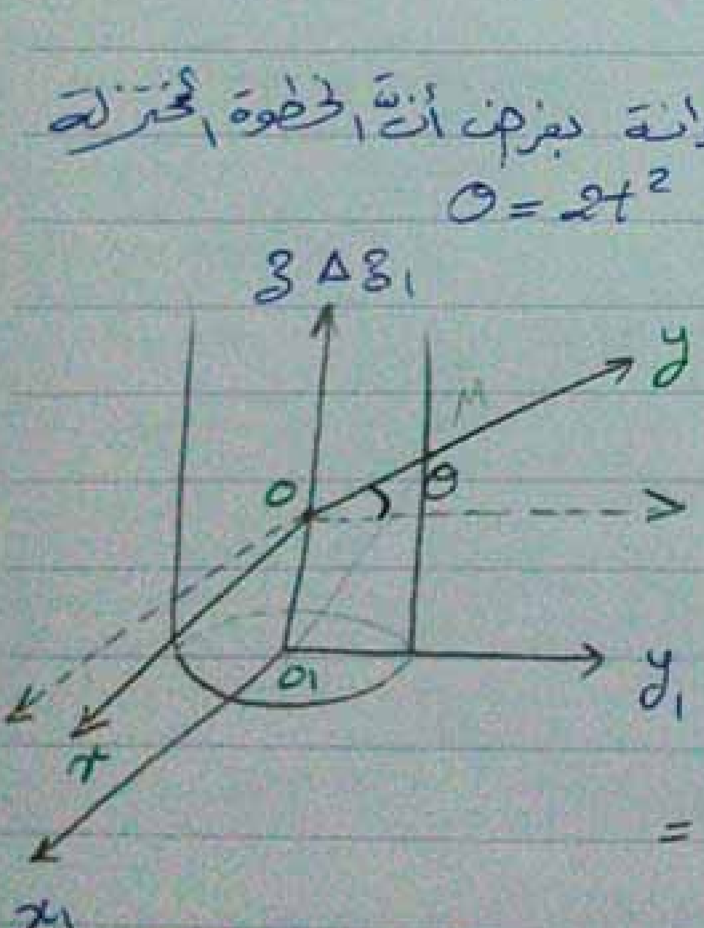
$-y\omega \qquad x\omega \qquad b\omega$

التسارع على الثابتة:

$$\vec{\Gamma}(M) = b\varepsilon\vec{k_1} + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & \omega \\ V_{x_1}(M) & V_{y_1}(M) & V_{z_1}(M) \end{vmatrix}$$

اسطوانة دائرية تتحرك حركة لولبية حول محورها حيث محور الاسطوانة ينطبق على محور الدوران و المطلوب:

تعيين سرعة و تسارع نقطة من سطح الاسطوانة بفرض أن الخطوة المختزلة للولب $b = 2$ و معادلة الحركة: $\theta = 2t^2$



الحل: لنأخذ النقطة $M(x, y, z)$

$\omega = \theta' = 4t$

$\varepsilon = \theta'' = 4$

على الجملة المتماسكة:

$\vec{O_1O} + \vec{OM}$

$$\vec{V}(M) = b\vec{\omega} + \vec{\omega} \wedge \vec{O_1M}$$

$$= 4tb + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 4t \\ x & y & 4t^2+z \end{vmatrix}$$

$z+b\theta$

$\vec{O_1O} = s = b\theta = 2(2t^2) = 4t^2$

على الجملة الثابتة :

$$\vec{V}(M) = 4bt\,\vec{k_1} + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & 4t \\ x\cos(2t^2)\ y\sin(2t^2) & +x\sin(2t^2) + y\cos(2t^2) & 3+4t^2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}(M) = -4t[x\sin(2t^2) + y\cos(2t^2)]\vec{i_1} + 4t(x\cos 2t^2 - y\sin 2t^2]\vec{j_1}$$
$$+ 4bt\,\vec{k_1}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = [-4(x\sin(2t^2) + y\cos(2y^2)) - 16t^2(x\cos 2t^2 -$$
$$y\sin 2t^2)]\vec{i_1} + [4(x\cos 2t^2 - y\sin 2t^2)$$
$$+ 16t^2(-x\sin 2t^2 - y\cos 2t^2)]\vec{j_1} + 4b\,\vec{k_1}$$