... تتمة حل تمارين المحاضرة (11) ...

مثال (1) :

ادرس تقارب متتالية التوابع $\left\{f_n(x) = \sin\frac{x}{n}\right\}$ على المجال $I = \mathcal{R}$

الحل :

نحسب أولاً تابع النهاية ..

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{x}{n} = 0$$

ليكن : $\varepsilon > 0$ ولتكن $x \in I$ ..

ونعلم أنه (اعتماداً على الملاحظة) :

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\sin\frac{x}{n} - 0\right| = \left|\sin\frac{x}{n}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\sin\frac{x}{n}\right| \le \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{|x|}{n}$$

ومنه يوجد : $N_0 \neq 0$ بحيث يكون :

هنا نختار $\varepsilon > \frac{|x|}{n} \Rightarrow n > \frac{|x|}{\varepsilon}$

وبالتالي وعندما : $n \ge N_0$ يكون : $N_0 > \frac{|x|}{\varepsilon}$

وبالتالي يكون لدينا ما يلي :

$$|f_n(x) - f(x)| \le \left|\frac{x}{n}\right| < \varepsilon$$

ومنه : التقارب غير منتظم على المجال I ..

... ملاحظة هامة ...

$$s = a_1 - a_2 + a_3 \mp \cdots$$

عندما يكون الحد الأول لمتتالية المجاميع (موجباً) فإن المجموع سيكون موجباً وقيمته محصورة بين الصفر وقيمة أول حد أي أن :

$$a_1 > 0 \Rightarrow s > 0 \Rightarrow 0 < s < a_1$$

وعندما يكون الحد الأول سالباً أي أن :

$$s_1 = -a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots$$

فإن المجموع سيكون سالباً وقيمته محصورة بين قيمة أول حد والصفر أي أن :

$$a_1 < 0 \Rightarrow s_1 < 0 \Rightarrow 0 > s_1 > a_1$$

وبناءً على ذلك وبالنسبة لتمريننا وبملاحظة منشور $\sin x$ نجد :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots$$

$$\begin{cases} x > 0 \Rightarrow 0 < \sin x < x \\ \Rightarrow |\sin x| = \sin x < x = |x| \\ \\ x < 0 \Rightarrow 0 > \sin x > x \\ \Rightarrow |x| = -x \,, |\sin x| = -\sin x \end{cases}$$

مثال (2) :

ادرس تقارب متتالية التوابع $\left\{f_n(x) = \sin\frac{x}{n}\right\}$ على المجال $I = [0\,,\,\frac{\pi}{2}]$

الحل :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{x}{n} = 0$$

و هنا نلاحظ ما يلي :

$f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$ مستمرة على المجال I ..((لأن التابع هنا أصبح محصوراً بين $\frac{\pi}{2}\,,\,0$ أي قطعة مستقيمة))

وإن المجال I مجال مغلق ..

وأيضاً : $f(x) = 0$ مستمر على المجال I ..

وكذلك : $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ بملاحظة أن : $(\forall n)\,,$ $\sin\frac{x}{n} \geq \sin\frac{x}{n+1}$

إذاً فالتقارب منتظم ((مبرهنة)) ..

متسلسلات التوابع

شكلها المختزل :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

شكلها المفصَّل :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

متسلسلة توابع معرفة على مجال مثل I ..

مجاميعها الجزئية :

$$s_1(x) = f_1(x)\,,\ s_2(x) = f_1(x) + f_2(x)\,, \ldots\,, \underbrace{s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)}_{\text{الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة}}\,, \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

متقاربة على المجال I .. ومجموعها هو $s\,(x)$ على المجال I .. إذا كانت :

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$$

وهذا يكافئ قولنا : ((متتالية التوابع $\{s_n(x)\}$ تتقارب من $s\,(x)$ على المجال I))
وبذلك يمكننا أن نكتب :

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

تعريف :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

متقاربة بانتظام على المجال I ومجموعها هو $s\,(x)$ على المجال I .. إذا كانت $\{s_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من $s\,(x)$ على المجال I ..

تعريف :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

متقاربة ليس بانتظام على المجال I ومجموعها هو $s\,(x)$ على المجال I .. إذا كانت $\{s_n(x)\}$ متقاربة ليس بانتظام من $s\,(x)$ على المجال I ..

ملاحظة :

$\{s_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من $s\,(x)$ على المجال I $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$ فإنه يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون :
$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$ عندما : $n \geq N_0$ وَ $\forall\, x \in I$ ..

$\{s_n(x)\}$ متقاربة من $s\,(x)$ على المجال I $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$ وَ $\forall\, x \in I$ فإنه يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون :
$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$ عندما : $n \geq N_0$ ..

نتيجة :

لتكن

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

متسلسلة توابع معرفة على مجال I .. ولنفرض أن هذه المتسلسلة متقاربة على المجال I ..

ومجموعها هو $s\,(x)$ على المجال I .. عندئذٍ :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

البرهان :

$$\begin{cases} s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_{n-1}(x) + f_n(x) \\ s_{n-1}(x) = f_1(x) + \cdots + f_{n-1}(x) \end{cases}$$

ومنه :

$$s_n(x) - s_{n-1}(x) = f_n(x) \qquad (*)$$

ولكن : $s_n(x) \longrightarrow s\,(x) \quad \& \quad s_{n-1}(x) \longrightarrow s\,(x)$ على المجال I

ومنه وبحسب $(*)$ نجد :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}(x) = s(x) - s(x) = 0$$

مبرهنة :

لتكن :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

متسلسلة توابع معرفة على مجال I .. ولنفرض أن هذه المتسلسلة متقاربة بانتظام على المجال I ..

عندئذٍ : تتقارب المتتالية $\{f_n(x)\}$ من الصفر بانتظام على المجال I ..

الإثبات :

لنفرض أن :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

متقاربة بانتظام على المجال I .. عندئذٍ تكون المتتالية $\{s_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على I ..

ليكن $\varepsilon > 0$ عندئذٍ يوجد : $N_0 \neq 0$ بحيث يكون : $|s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon$ عندما $m \geq n \geq N_0$ وَ $\forall\, x \in I$ ..

لنأخذ : $n \geq N_0 + 1$ فيكون : $n - 1 \geq N_0$ ومنه : $n > n - 1 \geq N_0$

ومنه : $|s_n(x) - s_{n-1}(x)| < \varepsilon \quad , \quad (\forall\, x \in I)$

ومنه : $|f_n(x)| < \varepsilon \quad , \quad (\forall\, x \in I)$

ومنه ومن أجل $\varepsilon > 0$ يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون :

$|f_n(x) - 0| < \varepsilon$ عندما $n \geq N_0$ وَ $\forall\, x \in I$ .. إذاً :

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$$

وبالتالي يمكننا القول أن المتتالية $\{f_n(x)\}$ تتقارب من الصفر بانتظام على المجال I ..

... وظيفة ...

أوجد منطقة التقارب لكل من المتسلسلات :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n \quad , \quad \mathcal{R} \,/\, [-1]$$ على المجال

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n + \cos x} \quad , \quad \mathcal{R}$$ على المجال

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x-1}} \quad , \quad \mathcal{R}$$ على المجال

" انتهت المحاضرة " ....