ثالثاً : طريقة لاغرانج في حالة عقد متساوية البعد :

ليكن $y = f(x)$ تابع معرف عند نقاط الارتكاز $x_0, x_1, \dots, x_n$ المرتبة تصاعدياً و المتساوية البعد فيما بينها أي : $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = h$ ومنه :

$$x_1 = x_0 + h$$
$$x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$x_n = x_{n-1} + h = x_0 + nh$$

نجري تغيير بالمتحول :

$$x = x_0 + th \Rightarrow t = \frac{(x - x_0)}{h}$$

فنلاحظ أن :

$$(x - x_i) = (x_0 + th) - (x_0 + ih) = (t - i)h$$
$$\left(x_j - x_i\right) = (x_0 + jh) - (x_0 + ih) = (j - i)h$$

وبالتالي حدودية لاغرانج على الشكل التالي :

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\times(x-x_1)\times\dots\times(x-x_{i-1})\times(x-x_{i+1})\times\dots\times(x-x_n)}{(x_i-x_0)\times(x_i-x_1)\times\dots\times(x_i-x_{i-1})\times(x_i-x_{i+1})\times\dots\times(x_i-x_n)}$$

$$= \frac{th\times(t-1)h\times\dots\times\big(t-(i-1)\big)h\times\big(t-(i+1)\big)h\times\dots\times(t-n)h}{ih\times(i-1)h\times\dots\times\big(i-(i-1)\big)h\times\big(i-(i+1)\big)h\times\dots\times(i-n)h}$$

$$= \frac{t\times(t-1)\times\dots\times\big(t-(i-1)\big)\times\big(t-(i+1)\big)\times\dots\times(t-n)}{i\times(i-1)\times\dots\times(1)\times(-1)\times\dots\times\big(-(n-i)\big)} \qquad \left(\times\frac{(t-i)}{(t-i)}\right)$$

$$= \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(t-i)\times i!\times(-1)^{n-i}\times(n-i)!} \qquad \left(\times\frac{n!}{n!}\right)$$

$$= (-1)^{n-i}\binom{n}{i}\frac{1}{t-i}\times\frac{t(t-1)\dots(t-n)}{n!}$$

ومنه حدودية الاستيفاء حسب لاغرانج كما يلي :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) \times y_i \Rightarrow \bar{P}_n(t) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}\binom{n}{i}\frac{1}{t-i} \times \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{n!} \times y_i$$

$$\boxed{\bar{P}_n(t) = \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{n!} \times \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\frac{y_i}{t-i}}$$

ملاحظة :

نلاحظ أن :

$$x = x_0 \Rightarrow t_0 = \frac{x_0 - x_0}{h} = 0 \Rightarrow \bar{P}_n(0) = y_0$$

$$x = x_1 \Rightarrow t_1 = \frac{x_1 - x_0}{h} = 1 \Rightarrow \bar{P}_n(1) = y_1$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$

$$x = x_n \Rightarrow t_n = \frac{x_n - x_0}{h} = n \Rightarrow \bar{P}_n(n) = y_n$$

وأيضا :

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
t	0	1	$\cdots$	n

مثال :

ليكن $y = f(x)$ تابع معرف بالجدول :

x	1	3	5	7	9
y	5	9	11	15	21

باستخدام طريقة لاغرانج احسب بشكل تقريبي قيمة

$$f(2) \ , \ f(5.5) \ , \ f(8.2)$$

الحل :

نلاحظ أن نقاط الارتكاز متساوية البعد فيما بينها حيث :

$$x_0 = 1 \ , \ h = 2 \ , \ n = 4$$

نجري تغير بالمتحول : $t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x-1}{2}$

$$x = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2} = 0.5 \Rightarrow f(2) \approx \bar{P}_4(0.5)$$

$$\bar{P}_4(0.5) = \frac{(0.5)\times(-0.5)\times(-1.5)\times(-2.5)\times(-3.5)}{4!} \times \sum_{i=0}^{4}(-1)^{4-i}\binom{4}{i}\frac{y_i}{0.5-i}$$

$$= (0.1367)(10 + 72 - 44 + 24 - 6) = 7.6552 \approx f(2)$$

$$x = 5.5 \Rightarrow t = 2.25 \Rightarrow f(5.5) \approx \bar{P}_4(2.25)$$

$$\bar{P}_4(2.25) = (0.0384)(2.2222 - 28.8 + 264 + 80 - 12) = 11.7282 \approx f(5.5)$$

$$x = 8.2 \Rightarrow t = 3.6 \Rightarrow f(8.2) \approx \bar{P}_4(3.6)$$

$$\bar{P}_4(3.6) = (-0.1497)(1.3888 - 13.8461 + 41.25 - 100 - 52.5) = 18.5189$$

مثال :

ليكن التابع $y = f(x)$ المعرف عند النقاط $0 , 0.1 , 0.2 , 0.3$ باستخدام طريقة لاغرانج احسب بشكل تقريبي $\cos(0.15)$, $\cos(0.22)$

الحل :

نكتب الجدول :

x	0	0.1	0.2	0.3
y	1	0.995	0.98	0.9553

نلاحظ أن نقاط الارتكاز متساوية البعد فيما بينها حيث : $x_0 = 0 \ , \ h = 0.1 \ , \ n = 3$

نجري التحويل : $t = \frac{x - x_0}{h} = 10x$

$$x = 0.15 \Rightarrow t = 1.5 \Rightarrow \cos(0.15) \approx \bar{P}_3(1.5)$$

$$\bar{P}_3(1.5) = \frac{(1.5) \times (0.5) \times (-0.5) \times (-1.5)}{4!} \times \sum_{i=0}^{3} (-1)^{3-i} \binom{3}{i} \frac{y_i}{1.5 - i}$$

$$= (0.09375)(-0.6667 + 5.97 + 5.88 + 0.6368) = 0.98874$$

$$x = 0.22 \Rightarrow t = 2.2 \Rightarrow \cos(0.22) \approx \bar{P}_3(2.2)$$

$$= (-0.0704) \times (-0.4545 + 2.4875 - 14.7 - 1.1941) = 0.9758$$

وظيفة :

اعد التمرين السابق من أجل التابع $y = f(x)$ من أجل نقاط الارتكاز $-2 , -1 , 0 , 1 , 2$
ثم احسب بشكل تقريبي قيمة $e^{1.5}$, $e^{(-0.8)}$

... انتهت المحاضرة (11) ...