كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة دمشق — السنة : الثانية

المقرر : تحليل (3) — الفصل : الأول

المحاضرة : (15) — التاريخ : 2013/11/25

... حل الوظيفة ...

1) - بفرض : $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ على مجال $\mathcal{R}$ .. أثبت أن :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} s(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\,.\frac{\pi}{2}}{n^3}$$

الحل :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} s(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos nx}{n^2}.dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.\frac{1}{n}[\sin nx]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left[\sin n\frac{\pi}{2}-\sin 0\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\,.\frac{\pi}{2}}{n^3}$$

2) - لتكن : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\sin x)}{n^3}$ هل تقارب هذه المتسلسلة منتظم على المجال $\mathcal{R}$ أم غير منتظم ؟؟

الحل :

$$\left|\frac{\cos(\sin x)}{n^3}\right|=\frac{|\cos(\sin x)|}{n^3}\le\frac{1}{n^3}\qquad : \forall n\ge 1\,,\forall x\in\mathcal{R}$$

وبما أن : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ متقاربة لأنها ريمانية (من أجل $\alpha=3>1$) وهي ذات حدود موجبة

فإننا نستنتج أن : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\sin x)}{n^2}$ تكون متقاربة بانتظام (حسب اختبار فايرشتراس) .

تتمة خواص تحويلات لابلاس :

4) - $L[e^{kt}] = ? \quad : k \in \mathcal{R}$

$$L[e^{kt}] = \int_0^{+\infty} e^{-st}.e^{kt}.dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-k)t}.dt$$

$$= -\frac{1}{s-k}\left[e^{-(s-k)t}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{s-k}\left[\frac{1}{e^{(s-k)t}}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{s-k}[0-1]$$

$$= \frac{1}{s-k}$$

حيث : $s - k > 0$ أي : $s > k$

$$\boxed{\overset{k\in\mathcal{R}}{\Longrightarrow} L[e^{kt}] = \frac{1}{s-k}}$$

حالات خاصة :

$$L[e^{+t}] = \frac{1}{s-1} \quad , \quad L[e^{-t}] = \frac{1}{s+1}$$

تذكرة :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad \Longrightarrow e^{kt} = 1 + \frac{kt}{1!} + \frac{k^2t^2}{2!} + \frac{k^3t^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots \quad \Longrightarrow \cos kt = 1 - \frac{k^2t^2}{2!} + \frac{k^4t^4}{4!} - \frac{k^6t^6}{6!} \pm \cdots$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots \quad \Longrightarrow \sin kt = \frac{kt}{1!} - \frac{k^3t^3}{3!} + \frac{k^5t^5}{5!} - \frac{k^7t^7}{7!} \pm \cdots$$

$$e^{it} = \cos t + i\sin t \quad \Longrightarrow e^{ikt} = \cos kt + i\sin kt \quad : i = \sqrt{-1} \qquad (*)$$

$$i = \sqrt{-1} \Longrightarrow i^2 = -1\,, \quad i^3 = i^2.i = -i\,, \quad i^4 = (i^2)^2 = 1\,, \quad i^5 = i^4.i = i$$

$$i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1 \quad , \quad i^7 = i^6.i = -i\ , \ldots$$

(برهان $(*)$) :

$$e^{ikt} = 1 + i\frac{kt}{1!} - \frac{k^2t^2}{2!} - i\frac{k^3t^3}{3!} + \frac{k^4t^4}{4!} + i\frac{k^5t^5}{5!} - \frac{k^6t^6}{6!} - i\frac{k^7t^7}{7!} \pm \cdots$$

$$\Rightarrow e^{ikt} = \left(1 - \frac{k^2t^2}{2!} + \frac{k^4t^4}{4!} \pm \cdots\right) + i\left(\frac{kt}{1!} - \frac{k^3t^3}{3!} + \frac{k^5t^5}{5!} - \frac{k^7t^7}{7!} \pm \cdots\right)$$

$$\Rightarrow e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$$

قوانين ((للحفظ))

$$L[\sin kt] = \frac{k}{s^2 + k^2} \quad , \quad L[\cos kt] = \frac{s}{s^2 + k^2}$$

طريقة حساب هذه القوانين :

ـ نستخدم طريقة التكامل بالتجزئة (تكامل دوَّار) :

$$L[\cos kt] = \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-st}}_{u} . \underbrace{\cos kt \, . dt}_{dv}$$

نكامل مرتين .. ونحافظ على اختيار u ذاته في كلا المرتين .. ونفس الطريقة لحساب $L[\sin kt]$

طريقة أخرى :

$$L[e^{ikt}] = \int_0^{+\infty} e^{-st} . e^{ikt} . dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-ik)t} \, . dt = \frac{-1}{s - ik} \left[e^{-(s-ik)t}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{-1}{s - ik} \left[\frac{1}{e^{(s-k)t}}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{s - ik}[0 - 1] = \frac{1}{s - ik}$$

$$\xRightarrow{\text{نضرب بالمرافق}} \frac{s + ik}{(s - ik)(s + ik)} = \frac{s + ik}{s^2 + k^2} = \frac{s}{s^2 + k^2} + i\frac{k}{s^2 + k^2}$$

ولكن : $(*)$ $L[e^{ikt}] = \frac{s}{s^2+k^2} + i\frac{k}{s^2+k^2}$

وأيضاً : $(**)$ $e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt \Rightarrow L[e^{ikt}] = L[\cos kt] + i\, L[\sin kt]$

وبالمقارنة بين $(*)$ وَ $(**)$ نجد :

$$L[\sin kt] = \frac{k}{s^2 + k^2}$$

$$L[\cos kt] = \frac{s}{s^2 + k^2}$$

مقارنة عددين عقديين :

نقارن القسم الحقيقي مع الحقيقي
والقسم التخيلي مع التخيلي

قوانين :

$$\begin{cases} e^{ikt} = \cos kt + i\sin kt \\ e^{-ikt} = \cos kt - i\sin kt \end{cases}$$

1. بجمع المعادلتين :

$$e^{ikt} + e^{-ikt} = 2\cos kt \implies \cos kt = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}$$

2. وبطرح المعادلتين :

$$e^{ikt} - e^{-ikt} = 2i\sin kt \implies \sin kt = \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i}$$

3. (قانون <1>)

$$L[f(t)] = F(s) \Longrightarrow L[e^{kt}.f(t)] = F(s-k) \quad ;\ k \epsilon \mathcal{R}$$

البرهان :

$$L[e^{kt}.f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st}.e^{kt}.f(t).dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-k)t}.f(t).dt$$

ولكننا نعلم من الفرض أن :

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st}.f(t).dt$$

إذاً :

$$L[e^{kt}.f(t)] = F(s-k)$$

4. (قانون <2>)

$$L[f(t)] = F(s) \implies L[t^n.f(t)] = (-1)^n \frac{d^nF(s)}{ds^n}$$

ـ أوجد ما يلي بطريقتين مختلفتين ..

تمرين (1) :

$$L[e^{3t}.\sin 2t] =?$$

الحل : نعلم أن

$$L[\sin 2t] = \frac{2}{s^2+4} = F(s) \Rightarrow L[e^{3t}.\sin 2t] = F(s-3)$$

$$= \frac{2}{(s-3)^2+4} = \frac{2}{s^2-6s+13}$$

تمرين (2) :

$$L[e^{3t}.t^2] =?$$

الحل : (حسب خواص تحويلات لابلاس)

$$L[t^2] = \frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{2}{s^3} = F(s)$$

$$L[e^{3t}.t^2] = F(s-3) = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$L[t^2.e^{3t}] =?$$

$$L[e^{3t}] = \frac{1}{s-3} = F(S)$$

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{-1.1}{(s-3)^2} = \frac{-1}{(s-3)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2F(s)}{ds^2} = \frac{-(-1).2(s-3)}{(s-3)^4} = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$L[t^2.e^{3t}] = (-1)^2\frac{d^2F(s)}{ds^2} = \frac{2}{(s-3)^3}$$

... انتهت المحاضرة (15) ....