المحاضرة الثالثة

2013\10\20

تتمة الخواص في المحاضرة السابقة.

8)بفرض $Q_{n\times n}$ مصفوفة مربعة فإن التابع $f(x)=x^TQx$ يكون محدب إذاا كانت المصفوفة Q معرفة موجبة.

$Example$ بين فيما اذا كان التابع f المعرف كمايلي محدبا أم لا ؟

$$f(x)=(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=2x_1x_2+3x_2^2=f(x_1,x_2)$$

الحل: حسب القضية 8 فإن التابع f يكون محدب اذاا كانت المصفوفة $Q=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ معرفة موجبة

نقول عن المصفوفة انها معرفة موجبة اذا تحقق الشرط حسب المحاضرة السابقة

بالتالي من الشرط نأخذ $\forall\, u\in\mathbb{R}^n: u^TAu\geq 0\,; u\neq 0$

$$\forall\, u=(u_1,u_2)\neq 0\in\mathbb{R}^2: u^TQu=u_1^2+2u_1u_2+3u_2^2=(u_1+u_2)^2+2u_2^2\geq 0$$

بالتالي المصفوفة معرفة موجبة التابع محدب.

طريقة ثانية لإثبات ان المصفوفة معرفة موجبة هي ان يكون عناصر القطر الرئيسي موجبة & $dat\,(Q)\neq 0$

لدينا $\det Q=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=3>0$ كما ان عناصر القطر الرئيسي $dig(Q)=\{1,3\}$ موجبة بالتالي يمكن ان نقول ان المصفوفة معرفة موجبة.

$Note$ في حال كان $\det(Q)\geq 0$ و عناصر القطر الرئيسي سالبة فإننا نقول عن المصفوفة Q أنها معرفة سالبة ونقول عن التابع $f=x^tQx$ انه مقعر.

$Note$:يمكن ان نقول عن مصفوفة انها معرفة موجبة اذا كانت جميع قيمها الذاتية موجبة لكنها عملية طويلة

.

مسائل البرامج المحدبة:

لتكن المسألة(البرنامج) بالشكل.

$Min\ f(x)$ دالة الهدف

$S.T\begin{cases}g_i(x)\geq 0 & ; i=0,\dots,t\\ h_j(x)=0 & ; j=0,\dots,p\end{cases}$ شروط المسألة

عندئذ يكون البرنامج محدب اذا تحقق $\left.\begin{matrix}f(x)\text{محدب}\\ g_i\text{مقعرة}\\ h_j\text{خطية توابع}\end{matrix}\right\}$

Exaهل البرنامج التالي محدب ام لا ولماذا؟

$$\text{Min}\ f(x)=3x_1^2+9x_2^2-6x_1x_2$$

$$S.T\begin{cases}2x_1^2+x_2^2-x_1x_2\leq 0\\ 5x_1-3x_2-4=0\end{cases}$$

الحل:واضح أن الشرط الأخير محقق و هو ان التابع $5x_1-3x_2-4=0$ خطي.

E-mail: imran.shamia@gmail.com

لنختبر باقي الشروط. لنثبت ان التابع f هو تابع محدب وذلك حسب التعريف

ليكن $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ يكون التابع f محدب اذا تحقق $x^T.\nabla^2 f.x\geq 0$

$$x^T.\nabla^2 f.x=(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}6 & -6\\ -6 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=6x_1^2-12x_1x_2+18x_2^2$$

$$=6(x_1-x_2)^2+12x_2^2\geq 0$$

بالتالي التابع fمحدب.

Note في الشروط الاساسية لتعريف البرنامج المحدب كانت الدالة gومن الشكل $g\geq 0$ اما فـي مسـألتنا فنجـد الشـرط $g\leq 0$ـلذلك نضـرب الدالـة بإشـارة سـالب ثـم نثبـت تقعر التابع.

بقي اثبات ان التابع $g\geq 0$ مقعر حيث $g=-g=-2x_1^2-x_2^2+x_1x_2\geq 0$ وذلك بعد ضرب التابع بإشارة سالب من أجل الوصول للشروط المفروضة

نأخذ اليعقوبي $\nabla^2 g=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ ولنوجد اشارة المقدار $u^t.\nabla^2 g.u$ حيث $u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$

$$u^t.\nabla^2 g.u=(u_1 \quad u_2).\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=-4u_1^2+2u_1u_2-2u_2^2 \quad =$$
$$-3u_1^2-u_2^2-(u_1-u_2)^2\leq 0$$

بالتالي فإن التابع g مقعر والبرنامج المعطى هو برنامج محدب.

البرامج الخطية:

في البرامج الخطية يكون كل من دالة الهدف ومجموعة الشروط هي دوال خطية بالتالي فإنها تحقق جميع شروط البرامج المحدبة (f محدب، g مقعر، hخطي)ويمكن حل هذه البرامج بعدة طرق

Note تطبق البرمجة الخطية لمعالجة القضايا من الشكل:

- ما السلع التي يجب انتاجها؟
- ما الكميات اليت يجب انتاجها من كل سلعة؟
- ما عوامل الصيانة والإصلاح الواجب اعتمادها في المؤسسة.....

أولا الطريقة البيانية:

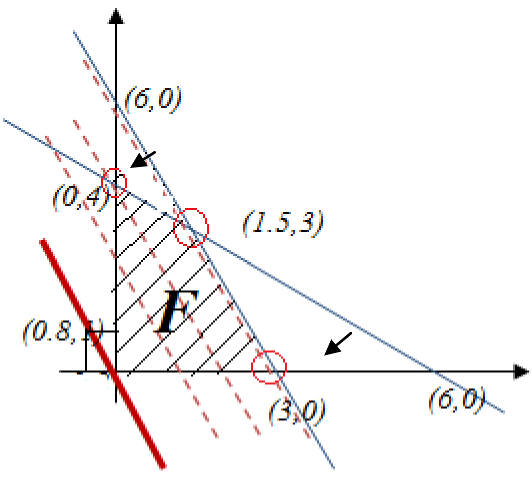
سنشرح الطريقة بمثال مباشر.

Exa ليكن البرنامج الخطي أوجد منطقة الحلول والحل الأمثل حيث

$$Max\ f=100x_1+80x_2$$

$$S.T\begin{cases}2x_1+x_2\leq 6\\ 6x_1+9x_2\leq 36\\ x_1,x_2\geq 0\end{cases}$$

طريقة أولى أولا نقوم برسم الشروط وذلك برسم المستقيم المقابل لكل شرط بإعطاء قسم لنقطتين منه



1) لناخذ المعادلة الموافقة للمستقيم في الشرط الأول

$2x_1+x_2=6$

$x_1=0\Longrightarrow x_2=6\ \Longrightarrow (0,4)$

$x_2=0\ \Longrightarrow x_1=3\ \Longrightarrow (3,0)$

2) $6x_1+9x_2=36$

$x_1=0\Longrightarrow x_2=4\Longrightarrow (0,4)$

$x_2=0\Longrightarrow x_1=6\Longrightarrow (6,0)$

Note

عند تغير دالة الهدف في منطقة الحلول فإن الحل الأمثل لها سوف يوافق أحدى زوايا تقاطع

E-mail: imran.shamia@gmail.com

كذلك نرسم دالة الهدف الموضحة باللون الأحمر حيث تمر بالنقطتين (0,0)و(8,1.0) ومنطقة الحلول هي F تقع في منطقة تقاطع حلول المتراجحتين في شروط البرنامج كذلك الشرط $x_1, x_2 \geq 0$ أي في الربع الأول .

Note رسم دالة الهدف اي رسم اي دالة موازية لها للسهولة وضعنا
$100x_1 + 80x_2 = 0$

بما ان دالة الهدف هي Max فإن الدالة تأخذ أفضل حل في منطقة الحلول عندما تكون أكبر ما يمكن وعندما نأخذ المستقيمات الموازية لدالة الهدف نلاحظ أن اكبر قيمة لها عندما يمر مستقيم دالة الهدف بنقطة تقاطع المستقيمين في شروط البرنامج وهي نقطة الحل المشترك للمستقيمين: $2x_1 + x_2 = 6$ و $6x_1 + 9x_2 = 36$ والتي هي النقطة $(1.5,3)$.

طريقة ثانية: ان الحل الأمثل سيكون أحد زوايا منطقة الحلول أي احد النقاط $(0,0), (0,4), (3,0)(1.5,3)$ نوجد قيمة كل نقطة حسب دالة الهدف وتكون النقطة ذات القيمة الأكبر هي الحل الأمثل(أخذنا القيمة الأكبر لأن دالة الهدف هي Max)

$$f(0,0) = 0 \ , \qquad f(0,4) = 320 \quad , \qquad f(3,0) = 300 \quad f(1.5,3) = 390 = Max$$

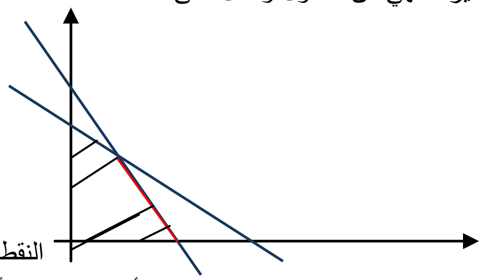
بالتالي الحل المثل هو $_1 = 1.5 \ \& \ x_2 = 3$ وقيمة الدالة عند هذه النقطة 390

أنواع البرامج الخطية حسب الحلول:

1) برنامج وحيد الحل وهو كما في المثال السابق.
2) عدد غير منتهي من الحلول ومثال على ذلك الدالة

$$Max\ 20x_1 + 10x_2$$

$$S.T \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 6x_1 + 9x_2 \leq 36 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

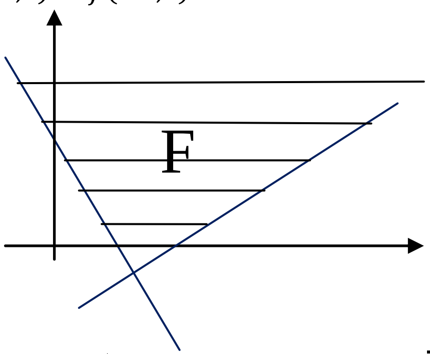


نلاحظ أن الدالة f يوازي الشرط الأول بالتالي الحل الأمثل جميع النقاط الواقعة بين النقطتين $(3,0)\&(1.5,3)$الموضحة باللون الأحمر

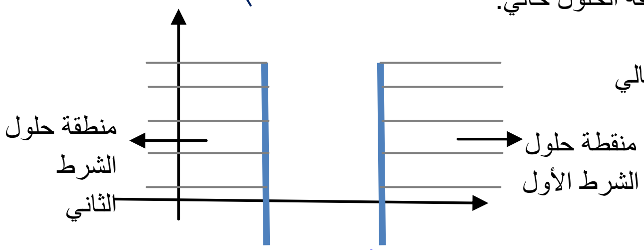
أي أنه يوجد عدد غير منتهي من الحلول الأمثلية ونلاحظ أن أي نقطة من المستقيم لها الصورة في دالة الهدف

$$f(3,0) = f(1.5,3) = 60$$

3) برامج غير محدودة(الحل الأمثل موجود في اللانهاية) فمثلا في الشكل المرسوم نلاحظ أنه عندما تكون دالة الهدف Max فغن الحل غير محدود أي قيمة دالة الهدف تأخذ أفضل قيمة لها في اللانهاية.



4) برامج مستحيلة الحل .يكون تقاطع منطقة الحلول خالي. كما في الشكل التالي حيث نلاحظ ان تقاطع منطقة الحلول خالي



www.syriamath.com

انتهت المحاضرة الثالثة.