- مثال: أوجد الحل المشترك لجملة المعادلات التكاملية التالية:

$$\varphi_1(x) = 1 - \int_0^x \varphi_2(t)\,dt$$

$$\varphi_2(x) = \cos x - 1 + \int_0^x \varphi_3(t)\,dt$$

$$\varphi_3(x) = \cos x + \int_0^x \varphi_1(t)\,dt.$$

الحل: نأخذ تحويل لابلاس فنجد:

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\varphi_2(z)$$

$$\varphi_2(z) = \frac{z}{z^2+1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\varphi_3(z)$$

$$\varphi_3(z) = \frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{z}\varphi_1(z)$$

ومنه: نعوض $\varphi_3(z)$ في $\varphi_2(z)$.

$$\varphi_2(z) = \frac{z}{z^2+1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\left(\frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{z}\varphi_1(z)\right)$$

$$= \frac{z}{z^2+1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2+1} + \frac{1}{z^2}\varphi_1(z)$$

$$\varphi_2(z) = \frac{z}{z^2+1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2+1} + \frac{1}{z^2}\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\varphi_2(z)\right]$$

$$\left(\frac{z^3+1}{z^3}\right)\varphi_2(z) = \frac{z^3+1}{z^3(z^2+1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_2(z) = \frac{1}{z^2+1}}$$

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\varphi_2(z) \Rightarrow \boxed{\varphi_1(z) = \frac{z}{z^2+1}}$$

/ /

$$\psi_3(z) = \frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{z}\psi_1(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi_3(z) = \frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{z^2+1}}$$

سأخذ تحويل لابلاس العكسي:

$$\psi_1(x) = \mathcal{L}^{-1}(\psi_1(z)) = \cos x$$

$$\psi_2(x) = \mathcal{L}^{-1}(\psi_2(z)) = \sin x$$

$$\psi_3(x) = \mathcal{L}^{-1}(\psi_3(z)) = \cos x + \sin x$$

* معادلة فولتيرا التكاملية اللاخطية والخطية:

نسمي كل معادلة من الشكل التالي بمعادلة فولتيرا اللاخطية:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x f[x, t, \varphi(t)]\, dt$$

وتحل باستخدام طريقة التقريبات المتتالية.

- نسمي المعادلة من الشكل:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_x^\infty k(x-t)\,\varphi(t)\, dt$$

معادلة فولتيرا الخطية على المجال $[x, \infty]$ وهذه المعادلة تحل باستخدام تحويلات فورييه وأحياناً باستخدام تحويلات لابلاس وبشكل خاص نظرية الطي (الالتفاف).

* معادلة آبل التكاملية:

نسمي المعادلة من الشكل:

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}\, dt = f(x)$$

معادلة آبل التكاملية حيث α ثابت يحقق $0 < \alpha = \text{Constant} < 1$

وعلاوة على ذلك للتابع $f(x)$ مشتقات مستمرة على المجال المغلق المحدود $[0, \alpha]$ ، النواة يجب أن تكون قابلة للمكاملة تربيعياً وفي الحالة التي تكون فيها $\alpha \geq \frac{1}{2}$ فإن نواة المعادلة غير قابلة للمكاملة تربيعياً أي أن النواة لا تنتمي إلى الصف L^2 أيضاً حل هذه المعادلة صعب.

* تعميم مسألة آبل :

تسمى كل معادلة من الشكل : بتعميم مسألة آبل

$$\int_0^x (x-t)^\beta \varphi(t)\, dt = x^\lambda$$

$$\text{where: } \beta > -1 \ , \ \lambda \geq 0$$

وحل هذه المعادلة يحتاج إلى جهد مضاعف . باستخدام دالة غاما .

* رد معادلة فولترا التكاملية من النوع الأول إلى معادلة فولترا من النوع الثاني

لتكن لدينا معادلة فولترا التكاملية من النوع الأول من الشكل التالي :

$$\int_0^x K(x,t)\, \varphi(t)\, dt = f(x) \ \ldots\ldots (1)$$

ويجب أن تحقق الشرط $f(0) = 0$ ولنفرض أن :

$f(x)$ ، $K(x,t)$ ، $\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}$ هي توابع مستمرة في المنطقة المحدودة بالمتراجحتين التاليتين :

$$0 \leq x \leq a \ , \quad 0 \leq t \leq x$$

وباستخدام دستور الاشتقاق الذي درسناه سابقاً نقوم باشتقاق طرفي المعادلة (1) بالنسبة لـ x فنحصل على ما يلي :

$$K(x,x)\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial K(x,t)}{\partial x} \varphi(t)\, dt = f'(x) \ \ldots\ldots (2)$$

أي أن حلول $\varphi(x)$ مستمرة للمعادلة (1) ومحققة للمتراجحة $0 \leq x \leq a$ فهي تحقق هذه المعادلة وبالعكس : إن أي حل مستمر للمعادلة (2) من أجل $0 \leq x \leq a$ هو محقق للمعادلة (1) أيضاً .

وبتقسيم طرفي المعادلة (٢) نحصل على الحد:

$$k(x,x) \neq 0 ,\ \forall x \in [0,a]$$

عندئذ نحصل على:

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{k(x,x)} - \int_0^x \frac{\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}}{k(x,x)}\varphi(t)\,dt$$

أو

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{k(x,x)} - \int_0^x \frac{k'_x(x,t)}{k(x,x)}\varphi(t)\,dt$$

أو

$$\varphi(x) = L(x) + \int_0^x H(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

وهي تمثل معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني ويمكن حلها باستخدام الطرق المعروفة: النواة الحالة، لابلاس.

وبهذا الشكل نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة التالية:

- مبرهنة:

إذا تحققت الشروط الآتية:

$$k(x,x) \neq 0 \quad , k,f \in C^1$$

صف التوابع التي لها مشتق

$$\forall x \in [a,b] \text{ أو } [0,a]$$

عندئذ: يمكن رد معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول إلى النوع الثاني.

- أمثلة: (١) سؤال دورة

لتكن لدينا $\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x$

تحقق من شرط الحل: $f(0) \overset{?}{=} 0$ وإذا كان الجواب بالإيجاب

نرد هذه المعادلة إلى النوع الثاني لفولتيرا ثم حل الناتجة باستخدام تحويلات لابلاس.

/ /

- الحل: $f(0)=0 \Leftarrow f(x)=0$ محققة ✓

$K(x,t)=\cos(x-t) \Rightarrow K(x,t), f(x) \in C^1$

$K(x,x)\varphi(x)+\int_0^x \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\varphi(t)dt = f'(x)$

$\cos(x-x)\varphi(x)-\int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt = 1$

$$\varphi(x)-\int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)dt=1$$

نأخذ تحويل لابلاس:

$$\psi(x)-\frac{1}{z^2+1}\psi(z)=\frac{1}{z}$$

$$\psi(z)\left[1-\frac{1}{z^2+1}\right]=\frac{1}{z}$$

$$\psi(z)\left[\frac{z^2}{z^2+1}\right]=\frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \psi(z)=\frac{z^2+1}{z^3}$$

$$\psi(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}$$

بالتحويل العكسي

$$L^{-}\left[\frac{2}{z^3}\right]=x^2$$

$$\Rightarrow \psi(x)=1+\frac{x^2}{2}$$

$$\mathcal{L}[x^n] = \frac{n!}{z^{n+1}}$$

/ /

مثال:

$$\int_0^x \psi(t)\psi(x-t)\,dt = \frac{x^3}{6}$$

الحل:

$$K(x,t) = \psi(x-t)$$

$$K(x) = \psi(x) \Longrightarrow \mathcal{L}[K(x)] = \psi(z)$$

نأخذ تحويل لابلاس للطرفين

$$\psi(z)\cdot\psi(z) = \mathcal{L}\left[\frac{x^3}{6}\right]$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{x^3}{6}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{6}x^3\right] = \frac{1}{6}[x^3] = \frac{1}{6}\,\frac{3!}{z^4} = \frac{1}{z^4}$$

$$\Longrightarrow [\psi(z)]^2 = \frac{1}{z^4}$$

جذر الطرفين:

$$\psi(z) = \mp\frac{1}{z^2}$$

بالتحويل العكسي:

$$\psi(x) = \mp x$$

وهذه المعادلة التكاملية ليس لها حلاً وحيداً.

مثال: نفس طلب المثال الأول:

$$\int_0^x \cos(x-t)\,\psi(t)\,dt = x + x^2$$

$$f(x) = x + x^2 \Longrightarrow f(0) = 0 \checkmark$$

$$K(x,x)\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\varphi(t)\,dt = f'(x)$$

$$\cos(x-x)\,\varphi(x) - \int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt = 1 + 2x$$

/ /

$$\psi(x) - \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)\,dt = 1+2x$$

بأخذ تحويل لابلاس:

$$\psi(z) - \frac{1}{z^2+1}\psi(z) = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2}$$

$$\psi(z)\left[1 - \frac{1}{z^2+1}\right] = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2}$$

$$\psi(z)\left[\frac{z^2}{z^2+1}\right] = \frac{z+2}{z^2}$$

$$\psi(z) = \frac{z+2}{z^2}\cdot\frac{z^2+1}{z^2} = \frac{(z+2)(z^2+1)}{z^4}$$

$$\psi(z) = \frac{z^3+z+2z^2+2}{z^4}$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z^4}$$

بالتحويل العكسي

$$\Rightarrow \psi(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{x^3}{3}$$

انتهت المحاضرة