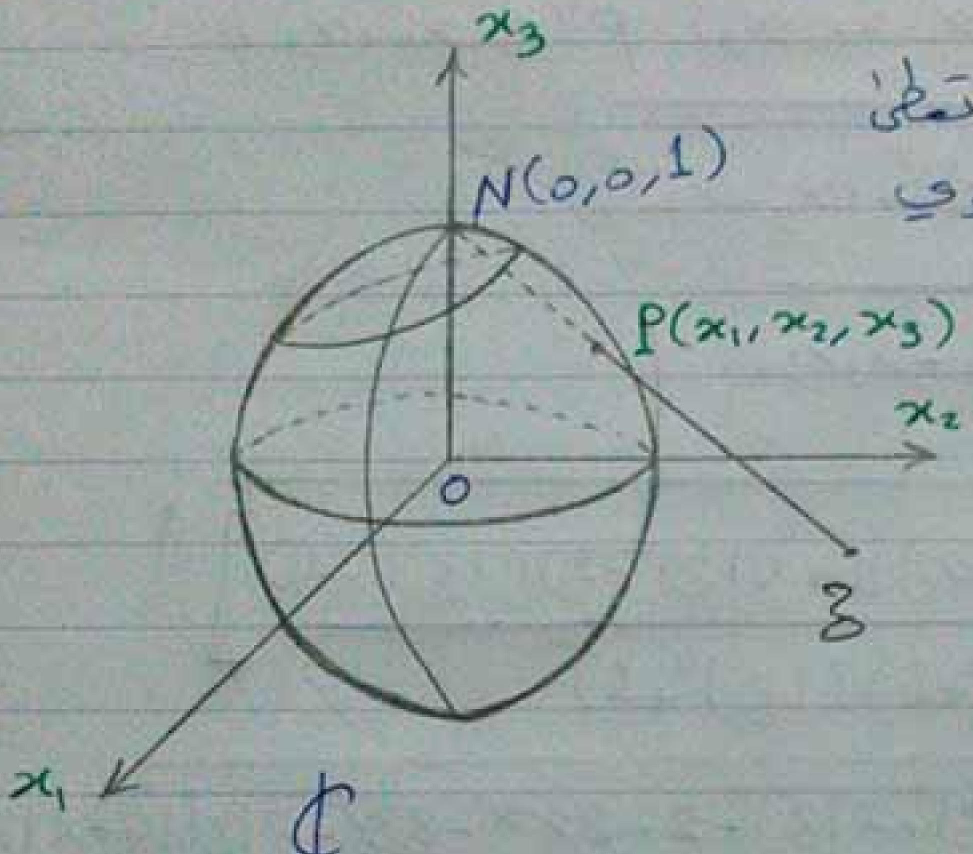
مبرهنة: الإسقاط المجسادي ينقل كل دائرة على كرة ريمان مارة بـ N إلى مستقيم في المستوي العقدي الموسع « $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ » وبالعكس، كما ينقل كل دائرة غير مارة بـ N إلى دائرة في المستوي العقدي وبالعكس.

الإثبات:



نعلم أن معادلة دائرة على كرة تعطى بمعادلة الكرة ومعادلة المستوي الذي تقع فيه الدائرة كما يلي:

$$S: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \; \dots \; (1)$$

$$\Delta: Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D \; \dots \; (2)$$

نعوض (1) في (2) فنجد:

$$A\frac{2x}{x^2+y^2+1} + B\frac{2y}{x^2+y^2+1} + C\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} = D$$

$$A\,2x + B\,2y + C(x^2+y^2-1) = D(x^2+y^2+1)$$

$$(x^2+y^2)(C-D) + 2Ax + 2By = D + C \qquad (*)$$

عندما تمر الدائرة بالنقطة N يكون $C = D$ [لأن $N(0,0,1)$ تحقق Δ] وبالتالي تصبح المعادلة (*) معادلة مستقيم في المستوي $\mathbb{C}$ وبالعكس وعندما لا تمر الدائرة بالنقطة N يكون $C \neq D$ وبالتالي تصبح المعادلة (*) معادلة دائرة في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ وبالعكس.

المسافة الوترية بين عددين عقديين:

بفرض أن $z = x + iy$ ، $z' = x' + iy'$ نقطتين من المستوي العقدي الموسع أي $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ عندئذٍ نعرف المسافة الوترية بينهما بالمسافة بين النقطتين $p(x_1, x_2, x_3)$ ، $p'(x'_1, x'_2, x'_3)$ المقابلتين على S كما يلي:

$$d(z, z') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2}$$

$$= \sqrt{2 - 2(x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3)}$$

$$= \sqrt{2 - 2\left[\frac{4xx' + 4yy' + (|z|^2 - 1)(|z'|^2 - 1)}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{2|z|^2 \cdot |z'|^2 + 2|z|^2 + 2|z'|^2 + 2 - 8xx' - 8yy' - 2|z|^2 \cdot |z'|^2 + 2|z|^2 + 2|z'|^2 - 2}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{|z|^2 + |z'|^2 - 2xx' - 2yy'}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - 2xx' - 2yy'}{(|z|^2 + 1) \cdot (|z'|^2 + 1)}}$$

$$= 2\,\frac{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}{\sqrt{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)}}$$

$$\boxed{d(z,z') = \frac{2|z-z'|}{\sqrt{(|z|^2+1)\cdot(|z'|^2+1)}}}$$

للحفظ

وإذا كانت $\infty = z'$ عندئذٍ تكون المسافة الوترية هي المسافة بين $P(x_1,x_2,x_3)$ و N على S كما يلي:

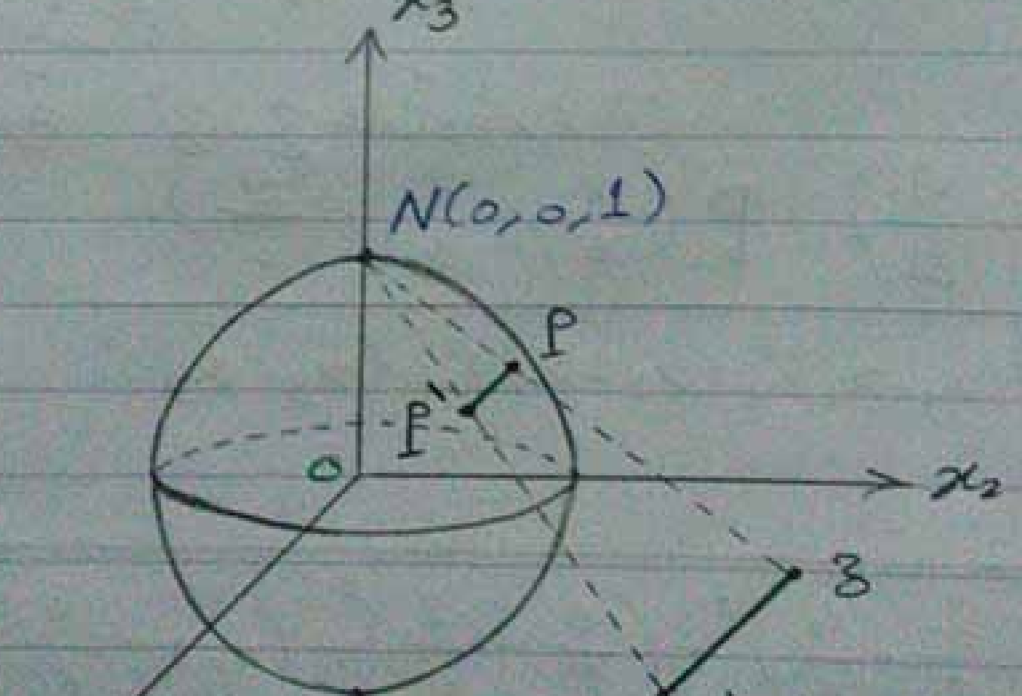
$$d(z,\infty) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3-1)^2}$$

$$= \sqrt{2-2x_3} = \sqrt{2-2\left(\frac{|z|^2-1}{|z|^2-1}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2|z|^2+2-2|z|^2+2}{|z|^2+1}} \rightarrow$$

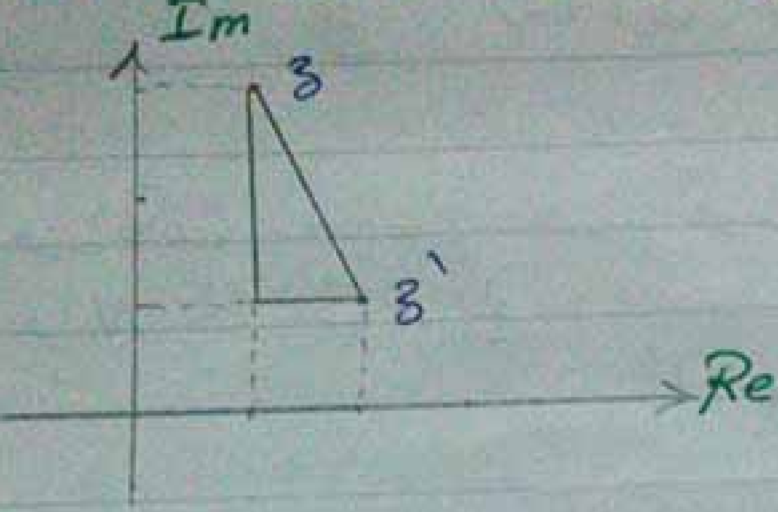
$$\boxed{d(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}}}$$

للحفظ



مثال توضيحي: ليكن لدينا العددان العقديان $z=1+3i ، z'=2+i$

أوجد المسافة الفعلية بينهما ثم أوجد المسافة الوترية.



الحل: للمسافة الفعلية:

$$|z-z'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

أمّا المسافة الوترية تعطى بالقانون:

$$d(z,z') = \frac{2|z-z'|}{\sqrt{(|z|^2+1).(|z'|^2+1)}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{66}}$$

طريقة ثانية:

نوجد صورة $z ، z'$ على كرة ريمان:

$$P\left(\frac{2}{11}, \frac{6}{11}, \frac{9}{11}\right) , P'\left(\frac{4}{6}, \frac{2}{6}, \frac{4}{6}\right)$$

فيكون:

$$d(z,z') = \sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{11}-\frac{4}{6}\right)^2+\left(\frac{6}{11}-\frac{2}{6}\right)^2+\left(\frac{9}{11}-\frac{4}{6}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-32}{66}\right)^2+\left(\frac{14}{66}\right)^2+\left(\frac{10}{66}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1024+196+100}}{66} = \frac{\sqrt{1320}}{66}$$

طلب إضافي : أوجد $d(z,\infty)$

$$d(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{11}}$$

طريقة ثانية:

$$d(z,\infty) = \sqrt{\left(\frac{2}{11}\right)^2+\left(\frac{6}{11}\right)^2+\left(\frac{9}{11}-1\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{4+36+4}}{11} = \frac{\sqrt{44}}{11} = \frac{2}{\sqrt{11}}$$

* وظيفة : أعد حل التمرين السابق من أجل :

$$z = 1+i \quad , \quad z' = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} i$$

انتهت المحاضرة