كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة دمشق　　　　السنة : الثانية

المقرر : تحليل (3)　　　　الفصل : الأول

المحاضرة : (14)　　　　التاريخ : 2013/11/24

... حل الوظيفة ...

أوجد منطقة التقارب لكل من المتسلسلات التالية :

على المجال $\mathcal{R} \,/\, [-1]$,　　$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$

الحل :

هذه المتسلسلة تكون متقاربة عندما وفقط عندما $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1$ (لأنها متسلسلة هندسية أساسها $\frac{x-1}{x+1}$)

ومنه وحسب خواص القيمة المطلقة نكتب :

$(*)$　　$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1$ وهنا نميز حالتين :

$$1)\ x+1>0 \xrightarrow{\text{نضرب } (*) \text{ بـ } x+1} -x-1 < x-1 < x+1$$

وعن المتراجحة الأخيرة ينجم متراجحتين هما :

$$\begin{cases} x-1 < x+1 \Rightarrow -1 < +1 \\ \text{وَ} \\ -x-1 < x-1 \Rightarrow 2x > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x > 0}$$

مقدار سالب

$$2)\ x+1<0 \xrightarrow{\text{نضرب } (*) \text{ بـ } x+1} -x-1 > x-1 > x+1$$

وعن المتراجحة الأخيرة ينجم أيضاً متراجحتين هما :

$$\begin{cases} x-1 < x+1 \Rightarrow -1 > +1 \longrightarrow \text{وهذا غير ممكن} \\ \text{وَ} \\ -x-1 < x-1 \Rightarrow 2x > 0 \end{cases}$$

تنويه : ((المتراجحتان يجب أن تتحققا كلتاهما وعدم تحقق إحداهما ينفي الكل))

إذاً : من الحالتين المدروستين نجد أن منطقة التقارب المطلوبة هي المجال المفتوح $]0,+\infty[$.

ملاحظة : ((إذا حصلنا على حلول ممكنة في كلتا الحالتين فإننا نأخذ تقاطع هذه الحلول))

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+\cos x} \quad , \quad$$ على المجال $\mathcal{R}$

الحل :

لدينا : $-1 \leq \cos x \leq +1$ (نضيف n)

$$\underbrace{n-1}_{\text{قيمة أكبر من الصفر لأن } n \text{ تبدأ من } 2} \leq n+\cos x \leq n+1$$

إذاً ما يهمنا $n+\cos x \leq n+1$ .. وبأخذ المقلوب لطرفي المتراجحة نجد أن :

$$\frac{1}{n+\cos x} \geq \frac{1}{n+1} \quad , \quad \forall\, x \in \mathcal{R} \,, \forall\, n \geq 2$$

ولكن $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ متباعدة (بالمقارنة مع المتسلسلة الريمانية $\sum \frac{1}{n}$)

إذاً : $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+\cos x}$ تكون متباعدة

وبالتالي منطقة التقارب هي $\emptyset$.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{x-1}} \quad , \quad$$ على المجال $\mathcal{R}$

الحل :

إن الشرط اللازم والكافي لكي تتقارب هذه المتسلسلة هو $(x-1>1)$ < شرط ريمان >

وبحل المتراجحة نجد : $x>2$

ومنه منطقة التقارب هي المجال $]2,+\infty[$.

تنويه :

((المبرهنات السبع الواردة في المحاضرات السابقة في فقرتي متتاليات التوابع ومتسلسلات التوابع " فقط "

سوف ترد إحداها في الإمتحان))

تتمات في متسلسلات التوابع :

اصطلاح (1) : عندما نقول (تكامل المجموع يساوي مجموع التكاملات) بالنسبة لمتسلسلة توابع فإننا نعني بذلك أنه يمكننا أن نكامل المتسلسلة حداً حداً .

اصطلاح (2) : عندما نقول (مشتق المجموع يساوي مجموع المشتقات) بالنسبة لمتسلسلة توابع فإننا نعني بذلك أنه يمكننا أن نشتق المتسلسلة حداً حداً .

نتائج :

1) لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على مجال I .. ومجموعها هو :

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{r=1}^{n} f_r(x)$$

(أي أن حدودها مستمرة) .. و $s(x) \longrightarrow s_n(x)$ عندما $n \longrightarrow \infty$ (أي تقاربها منتظم) عندئذ :

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

2) إذا كانت : $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على مجال I وكانت متقاربة بانتظام على I (أي أن مجموعها هو $f(x)$ على I) وكانت حدودها مستمرة على I .. فإن $f(x)$ يكون مستمراً على I ..

3) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على مجال I وكانت متقاربة بانتظام من $f(x)$ على المجال $I = [a,b]$ .. وكانت حدودها مستمرة على I فإنه يمكننا أن نكاملها حداً حداً ..

4) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على مجال I وكانت متقاربة من $f(x)$ على المجال I وكانت حدودها قابلة للإشتقاق على I ومشتقاتها مستمرة على I .. ومتسلسلة

المشتقات (أي $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$) متقاربة بانتظام من تابع معين فإنه يمكننا أن نشتقها حداً حداً ..

5) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-\alpha)^n$ متسلسلة قوى مركزها α (مثلاً) .. وكان مجال تقاربها هو I ..

وكان : $[a,b] \subsetneq I$, $x_0 \epsilon I$ .. عندئذٍ فإن :

1. تكامل المجموع = مجموع التكاملات .. على المجال I .
2. مشتق المجموع = مجموع المشتقات .. في النقطة x_0 .

كما أن مجال التقارب لا يتغير .. < لأن متسلسلة القوى تكون متقاربة بانتظام داخل مجال التقارب > .

اختبار فايرشتراس :

لتكن : $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ لسلسلة توابع معرفة على مجال I .. ولنفرض وجود متسلسلة عددية متقاربة وذات حدود غير سالبة مثل : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بحيث تكون : $|f_n(x)| \leq a_n$ وَ $(\forall n \geq 1 , \ \forall x \in I)$

عندئذٍ : تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على المجال I ..

مثال :

ادرس التقارب للمتسلسلة الآتية من حيث كونه منتظماً أم غير منتظم ..

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n.x}{n^7}$$ على المجال $\mathcal{R}$

الحل :

$$\left|\frac{\cos n.x}{n^7}\right| \leq \frac{|\cos n.x|}{n^7} \leq \frac{1}{n^7} \qquad ,(\forall n \geq 1 , \forall x \in \mathcal{R})$$

ولدينا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7}$ متسلسلة ذات حدود موجبة ومتقاربة لأنها ريمانية (من أجل $\alpha = 7 > 1$) ..

إذاً : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n.x}{n^7}$ تكون متقاربة بانتظام على المجال $\mathcal{R}$ (حسب اختبار فايرشتراس) .

< تـحـويـلات لابـلاس >

Laplace transforms

تعريف :

ليكن $f(t)$ تابعاً مناسباً .. إن تحويل لابلاس لهذا التابع يرمز له بالرمز $L[f(t)]$ ويعرف كما يلي :

$$L[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st}.f(t).dt \qquad (*)$$

حيث : $t \geq 0$, $s > 0$ .. ويكون الجواب في حالة تقارب هذا التكامل المعتل تابعاً لـ s ويرمز له بالرمز $F(s)$ .. وتجدر الإشارة إلى أنه يمكن التحكم بقيمة $s > 0$ بحيث نضمن تقارب هذا التكامل المعتل .

خواص تحويلات لابلاس :

1) - $f(t) = 1 = t^0 \Rightarrow F(s) = L[f(t)] = L[1] = \frac{1}{s}$

البرهان : (نعوض في $(*)$)

$$L[1] = \int_0^{+\infty} e^{-st}.1.dt = -\frac{1}{s}[e^{-st}]_0^{+\infty} = -\frac{1}{s}\left[\frac{1}{e^{st}}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{s}[0-1] = \frac{1}{s}$$

2) - $L[\alpha_1.f_1(t) + \alpha_2.f_2(t)] = \alpha_1.L[f_1(t)] + \alpha_2.L[f_2(t)] \Leftrightarrow$ خطي (L) تحويل لابلاس

3) - $f(t) = t^n \ : n \geq 1 \Rightarrow F(s) = L[f(t)] = L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$

البرهان : (نعوض في $(*)$)

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}.t^n.dt = \int_0^{+\infty} t^n.e^{-st}.dt$$

$$\xRightarrow{\text{بالتجزئة}} F(s) = \underbrace{-\frac{1}{s}\left[\frac{t^n}{e^{st}}\right]_0^{+\infty}}_{(0)} + \frac{n}{s}.\int_0^{+\infty} t^{n-1}.e^{-st}.dt$$

بما أن n منتهي فإن هذا المقدار سيسعى للصفر(باستخدام أوبيتال)

$$\Longrightarrow L[t^n] = \frac{n}{s} L[t^{n-1}]$$

$$L[t^{n-1}] = \frac{n-1}{s} L[t^{n-2}]$$

$$L[t^{n-2}] = \frac{n-2}{s} L[t^{n-3}]$$

$$\vdots$$

$$L[t^2] = \frac{2}{s} L[t]$$

$$L[t] = \frac{1}{s} L[t^0]$$

((نضرب الأطراف اليمنى ببعضها والأطراف اليسرى ببعضها)) أي أن :

$$L[t^n].\underbrace{\cancel{L[t^{n-1}]. \dots . L[t^2]. L[t]}} = \frac{n!}{s^n} \underbrace{\cancel{L[t^{n-1}]. L[t^{n-2}]. \dots . L[t]}}. L[t^0]$$

$$\Longrightarrow L[t^n] = \frac{n!}{s^n} . L[t^0] = \frac{n!}{s^n} . \frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

من الخاصتين *1* و *3* نستنتج الدستور التالي :

$$\boxed{F(s) = L[f(t)] = L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad : n \geq 0 \ , n \epsilon N}$$

... وظيفة ...

1) - بفرض : $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ على مجال $\mathcal{R}$ .. أثبت أن :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} s(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n . \frac{\pi}{2}}{n^3}$$

2) - لتكن : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\sin x)}{n^3}$ هل تقارب هذه المتسلسلة منتظم على المجال $\mathcal{R}$ أم غير منتظم ؟؟!

... انتهت المحاضرة (14) ....