الفصل الثاني : الاستيفاء الداخلي :

تعريف :

ليكن لدينا مجموعة من النقاط $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ في المستوي
وليكن $y = f(x)$ تابع معرف بشكل نقطي كما يلي :

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

نعرف مسألة الاستيفاء بأنها عملية إيجاد تابع حدودي $P_n(x)$ من الدرجة n . يمر من هذه النقاط أي يحقق الشرط :

$$P_n(x_i) = y_i \ : \quad i = \{0,1,2,\dots\dots\dots,n\}$$

حيث نسمي $x_0, x_1, x_2, \dots\dots, x_n$ بنقاط الارتكاز

طرق الاستيفاء الداخلي :

أولاً : الطريقة العامة في الاستيفاء :

ليكن $y = f(x)$ تابع معرف بالجدول التالي :

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

و لتكن $P_n(x)$ الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$
من الشكل : $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ لدينا :

$$P_n(x_i) = y_i \ ; \ i = \{0,1,2,\dots\dots,n\}$$

$$a_n x_0^n + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = y_0$$

$$a_n x_1^n + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = y_1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_n x_n^n + \cdots + a_1 x_n + a_0 = y_n$$

وهي جملة $(n+1)$ معادلة خطية بـ $(n+1)$ مجهول هم $\{a_n, \dots\dots, a_1, a_0\}$
لحلها نستخدم أي طريقة من طرق حل المعادلات .

تذكرة بطريقة كرامر لحل المعادلات :

نقوم بإيجاد Δ محدد الأمثال حيث بالنسبة للجملة السابقة من الشكل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

وهو على شكل محدد فاندرموند ونشره من الشكل

$$= (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n) \dots \dots (x_{n-1} - x_n)$$

ثم نقوم باستبدال عمود الثوابت $\begin{vmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix}$ بالعمود الأول ثم الثاني و هكذا ، فنحصل على $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n$ فيكون

$$a_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \;:\; i = \{0,1, \dots, n\}$$

مثال :

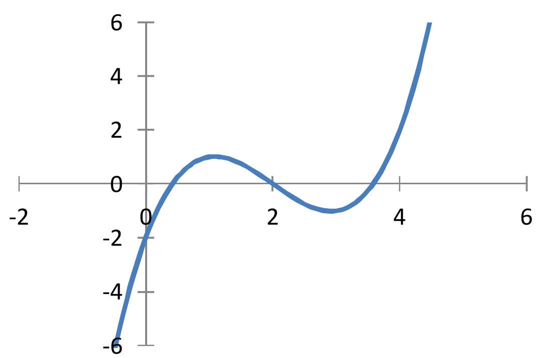
باستخدام الطريقة العامة للاستيفاء أوجد حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y = f(x)$

المعرف بالجدول :

ثم أحسب بشكل تقريبي $f(1.5)$

x	0	1	2	3
$f(x)$	-2	1	0	-1

الحل :



نلاحظ أن حدودية الاستيفاء من الدرجة الثالث ولتكن :

$P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ومنه :

$$a_3(0)^3 + a_2(0)^2 + a_1(0) + a_0 = -2$$
$$a_3(1)^3 + a_2(1)^2 + a_1(1) + a_0 = 1$$
$$a_3(2)^3 + a_2(2)^2 + a_1(2) + a_0 = 0$$
$$a_3(3)^3 + a_2(3)^2 + a_1(3) + a_0 = -1$$

من المعادلة الأولى نجد أن $a_0 = -2$ نعوض فنجد المعادلات الآتية :

$$a_3 + a_2 + a_1 = 3$$
$$8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = 2$$
$$27a_3 + 9a_2 + 3a_1 = 1$$

وهي جملة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل a_1, a_2, a_3 لحلها نستخدم طريقة كرامر :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \end{vmatrix} = (12 - 18) - (24 - 54) + (72 - 108) = -6 + 30 - 36 = -12 \neq 0$$

أي للجملة حل وحيد

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 1 \end{vmatrix} = (4 - 18) - (8 - 54) + 3(72 - 108) = -14 + 46 - 108 = -76 \Rightarrow a_1 = \frac{-76}{-12} = \frac{19}{3}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 8 & 2 & 2 \\ 27 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 48 \Rightarrow a_2 = \frac{48}{-12} = -4$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{vmatrix} = -8 \Rightarrow a_3 = \frac{-8}{-12} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow P_3(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + \frac{19}{3}x - 2$$

$$f(1.5) \approx P_3(1.5) = \frac{3}{4}$$

وظيفة :

باستخدام الطريقة العامة للاستيفاء أوجد حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول :

x	-2	1	3
$f(x)$	-5	1	-5

ثم احسب $f(2.5)$

ثم أعد التمرين السابق من أجل الجدول :

x	-1	0	2	3
$f(x)$	3	-1	2	0

ثم احسب $f(1)$

... انتهت المحاضرة (8) ...