/ /

$$= \frac{\pi}{4}\left[-\frac{\cos(x-t+2z)}{2} + \cos(z+t) \right]_0^{\pi}$$

$$K_3(x,t) = \frac{\pi^2}{4} K_1(x,t) = \frac{\pi^2}{2^2} K_1(x,t)$$

$$K_4(x,t) = \frac{\pi^2}{4} K_2(x,t) = \frac{\pi^2}{2^2} K_2(x,t)$$

$$K_5(x,t) = \frac{\pi^4}{2^4} K_1(x,t)$$ بالحساب

- المحاضرة الخامسة :

- النواة الحالة :

الحد العام :

$$K_1(x,t) + \lambda K_2(x,t) + \lambda^2 K_3(x,t) + \lambda^3 K_4(x,t) + \lambda^4 K_5(x,t) + \dots + \lambda^{m-1} K_m(x,t), \dots = R(x,t,\lambda)$$

- متسلسلة حدودية غير منتهية بـ λ.

R تسمى بالنواة الحالة لـ $K(x,t)$ وهي تمثل دالة تحليلية.

نعلم أن :

$$K_m(x,t) = \int_a^b K_{m-1}(x,z)\, K_1(z,t)\, dz$$

لنطبق متراجحة شفارتز :

$$|K_m(x,t)|^2 \le \int_a^b |K_{m-1}(x,z)|^2 dz \cdot \int_a^b |K_1(z,t)|^2 dz$$

نفرض :

$$\text{let: } C_0^2 = \sup_t \int_a^b |K_1(z,t)|^2 dz$$

$$C_{m-1}^2 = \sup_t \int_a^b |K_{m-1}(x,z)|^2 dz$$

$$|K_m(x,t)|^2 \leq C_{m-1}^2 \cdot C_0^2$$

نعلم أن :

$$C_m^2 \leq C_{m-1}^2 \cdot B^2 \leq C_{m-2}^2 \cdot B^4 \leq \cdots \leq C_1^2 B^{2m-2}$$

نلاحظ أن :

$$C_{m-1}^2 \cdot B^2 \leq C_1^2 B^{2(m-1)}$$

نقسم على B^2

$$C_{m-1}^2 \leq C_1^2 B^{2(m-2)}$$

$$|K_m(x,t)|^2 \leq C_1^2 \cdot B^{2(m-2)} \cdot C_0^2$$

نجذر الطرفين :

$$|K_m(x,t)| \leq C_1 \cdot C_0 B^{m-2}$$

بالعودة الحد العام بالقيمة المطلقة للسلسلة الاولى :

$$|\lambda^{m-1} K_m(x,t)| \leq |\lambda|^{m-1} C_1 \cdot C_0 B^{m-2}$$ نرمزنا B

$$= \frac{C_1 \cdot C_0}{B} [\,\underbrace{|\lambda| \cdot B}\,]^{m-1}$$

x^{m-1} متسلسلة هندسية لأن الحد العام لمتسلسلة هندسية أساسها

$|\lambda| \cdot B$ ، بالتالي تكون متقاربة إذا كان $|\lambda| \cdot B < 1$

$\Leftarrow$ $\frac{1}{B} > |\lambda|$ $\Leftarrow$ متقاربة بانتظام حسب اختبار فايرستراش

$\Leftarrow$ المتسلسلة السابقة متقاربة في القرص $D(0, \frac{1}{B})$

$\Leftarrow$ $R(x,t,\lambda)$ تمثل دالة تحليلية في القرص المذكور

. إذن استخدام النواة الحالة يكون دائماً في القرص $D(0, \frac{1}{B})$

. استخدام النواة الحالة المكررة يكون دائماً في هذا القرص ، إذا كان القرص

صغير ونريد تكبيره نكبره باستخدام التمديد التحليلي .

/ /

استنتاج صيغ الحل للمعادلات التكاملية باستخدام النواة الحالة:

لدينا:

$$R(x,t,\lambda) = K_1(x,t) + \lambda K_2(x,t) + \lambda^2 K_3(x,t) + \dots \lambda^{m-1} K_m(x,t)$$

نضرب طرفي المعادلة بـ $K_1(\xi,x)$

$$R(x,t,\lambda)\,K_1(\xi,x) = K_1(\xi,x)K_1(x,t) + \lambda K_2(x,t)K_1(\xi,x)$$
$$+ \lambda^2 K_3(x,t)K_1(\xi,x) + \dots \lambda^{m-1} K_m(x,t)K_1(\xi,x) + \dots$$

نأخذ التكامل بالنسبة لـ x.

$$\int_a^b K_1(\xi,x)R(x,t,\lambda)\,dx = \int_a^b K_1(x,t)K_1(\xi,x)\,dx + \dots$$

نضرب جميع الحدود بـ λ.

$$\lambda\int_a^b K_1(\xi,x)R(x,t,\lambda) = \lambda\int_a^b K_1(x,t)K_1(\xi,x)\,dx + \lambda^2\int_a^b K_2(x,t)K_1(\xi,x)\,dx$$
$$+ \lambda^3\int_a^b K_3(x,t)K_1(\xi,x)\,dx + \dots \lambda^m\int_a^b K_m(x,t)K_1(\xi,x)\,dx$$

$$= \lambda K_2(\xi,t) + \lambda^2 K_3(\xi,t) + \lambda^3 K_4(\xi,t) + \dots \lambda^{m-1} K_m(\xi,t) + \lambda^m K_{m+1}(\xi,t) + \dots$$

$$= R(\xi,t,\lambda) - K_1(\xi,t)$$

$$\Rightarrow R(\xi,t,\lambda) = K_1(\xi,t) + \lambda\int_a^b K_1(\xi,x)R(x,t,\lambda)\,dx$$

$$x \to \xi \;,\; \xi \to x$$

$$\boxed{R(x,t,\lambda) = K(x,t) + \lambda\int_a^b K(x,\xi)R(\xi,t,\lambda)\,d\xi}$$

وهي تمثل معادلة تكاملية من نمط معادلة فريدهولم و t يلعب الوسيط

والآن بشكل مشابه يمكن اجراء نفس الطريقة لنبرهن:

$$R(x,t,\lambda) = k(x,t) + \lambda \int_a^b k(\zeta,t)\, R(x,\zeta,\lambda)\, d\zeta$$

حصلنا على صيغة اخرى من نمط معادلة فريدهولم

استنتاج صيغة الحل باستخدام النواة الحالة:

لتكن لدينا معادلة فريدهولم التكاملية:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\psi(t)\, dt$$

or

$$(\star)\quad \frac{\psi(x) - h(x)}{\lambda} = \int_a^b k(x,t)\psi(t)\, dt$$

باستخدام الصيغة الاخيرة:

we have: $R(x,t,\lambda) = k(x,t) + \lambda \int_a^b k(\zeta,t)\, R(x,\zeta,\lambda)\, d\zeta$

$$k(x,t) = R(x,t,\lambda) - \lambda \int_a^b k(\zeta,t)\, R(x,\zeta,\lambda)\, d\zeta \quad (\star\star)$$

نعوض ** في *:

$$\frac{\psi(x) - h(x)}{\lambda} = \int_a^b \left[R(x,t,\lambda) - \lambda \int_a^b k(\zeta,t)\, R(x,\zeta,\lambda)\, d\zeta \right] \psi(t)\, dt$$

نفك الأقواس:

$$= \int_a^b R(x,t,\lambda)\psi(t)\, dt - \lambda \int_a^b \int_a^b k(\zeta,t)\, R(x,\zeta,\lambda)\, \psi(t)\, d\zeta\, dt$$

$$= \int_a^b R(x,t,\lambda)\psi(t)\, dt - \lambda \int_a^b R(x,\zeta,\lambda) \int_a^b k(\zeta,t)\, \psi t\, dt\, d\zeta$$

بالاستفادة من *:

$$\frac{\psi(x) - h(x)}{\lambda} = \int_a^b R(x,t,\lambda)\psi(t)\, dt - \lambda \int_a^b R(x,\zeta,\lambda) \left[\frac{\psi(\zeta) - h(\zeta)}{\lambda} \right] d\zeta$$

نفك الأقواس:

$$= \int_a^b R(x,t,\lambda)\psi(t)\, dt - \int_a^b R(x,\zeta,\lambda)\, \psi(\zeta)\, d\zeta + \int_a^b R(x,\zeta,\lambda)\, h(\zeta)\, d\zeta$$

نبدل كل t بـ ζ:

$$\int_a^b R(x,\zeta,\lambda)\, \psi(\zeta)\, d\zeta - \int_a^b R(x,\zeta,\lambda)\psi(\zeta)\, d\zeta + \int_a^b R(x,\zeta,\lambda)\, h(\zeta)\, d\zeta$$

$$= \int_a^b R(x,\xi,\lambda)\, h(\xi)\, d\xi$$

$$\boxed{\frac{\psi(x)-h(x)}{\lambda} = \int_a^b R(x,\xi,\lambda)\, h(\xi)\, d\xi}$$

ومنه حل المعادلة $\psi(x)$:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b R(x,\xi,\lambda)\, h(\xi)\, d\xi$$

نبدل كل ξ بـ t:

$$\boxed{\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda)\, h(t)\, dt}$$

// صيغة الحل باستخدام النواة الحالة //

مثال:

حل المعادلات التكاملية التالية باستخدام النواة الحالة:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_0^1 x.t\, \psi(t)\, dt$$

الحل: نوجد النوى المكررة:

$$K_1(x,t) = K(x,t) = x.t$$

$$K_2(x,t) = \int_a^b K_1(x,\xi)\, K_1(\xi,t)\, d\xi =$$

$$= \int_0^1 x.t.\xi^2\, d\xi = \frac{x.t}{3}\left[\xi^3\right]_0^1$$

$$K_2(x,t) = \frac{1}{3}\, x.t$$

$$K_3(x,t) = \int_0^1 K_2(x,\xi)\, K_1(\xi,t)\, d\xi$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (x.\xi)(\xi.t)\, d\xi$$

$$= \frac{1}{3.3}\, x.t\, \left[\xi^3\right]_0^1$$

$$K_3(x,t) = \frac{1}{3^2}\, x.t$$

/ /

$$K_m(x,t) = \frac{1}{3^{m-1}}\, x.t$$

$$R(x,t,\lambda) = K_1(x,t) + \lambda K_2(x,t) + \lambda^2 K_3(x,t) + \cdots$$

$$= x.t + \frac{\lambda}{3} x.t + \frac{\lambda^2}{3^2} x.t + \frac{\lambda^3}{3^3} x.t + \cdots + \frac{\lambda^m}{3^m} x.t$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,t)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} \frac{1}{3^{m-1}} x.t$$

$$= x.t \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{m-1} = x.t \left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{3}}\right)$$

$$= x.t \left(\frac{3}{3-\lambda}\right) = \frac{3.x.t}{3-\lambda} \quad \{|\lambda| < 3\}$$

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda)\, h(t)\, dt$$

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_0^1 \frac{3.x.t}{3-\lambda} h(t)\, dt$$

نفرض $h(x) = x$

$$\psi(x) = x + \lambda \int_0^1 \frac{3.x.t}{3-\lambda}\, t\, dt$$

$$= x + \frac{3\lambda x}{3-\lambda} \int_0^1 t^2\, dt$$

$$\psi(x) = x + \frac{\lambda x}{3-\lambda}$$

/ /

مثال :

$$\Psi(x) = \cos 2x + \int_0^{2\pi} \sin x . \cos t \ \Psi(t)\, dt$$

$$K_1(x,t) = K(x,t) = \sin x . \cos t$$

$$K_2(x,t) = \int_0^{2\pi} (\sin x . \cos z).(\sin z . \cos t)\, dz$$

$$= \frac{1}{2} \sin x . \cos t \int_0^{2\pi} \sin 2z \, dz$$

$$= \frac{1}{2} \sin x . \cos t \left[-\frac{\cos 2z}{2} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\Rightarrow K_2(x,t) = 0$$

$$K_3 = 0$$

$$\vdots$$

$$K_m = 0$$

$$R(x,t,\lambda) = \sin x . \cos t$$

$$\Psi(x) = \cos 2x + \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin x}_{\text{ثابت}} \underbrace{\cos t . \cos 2t}_{0} \, dt$$

$$\Psi(x) = \cos 2x$$

مثال :

$$\Psi(x) = 1 + \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+1) \Psi(t)\, dt$$

المسألة بالمحاضرة (4)

$$R = \sin(x+t) + \lambda \frac{\pi}{2} \cos(x-t) + \lambda^2 \frac{\pi^2}{2^2} \sin(x+t)$$

$$+ \frac{\lambda^3 \pi^3}{2^3} \cos(x-t) + \cdots$$

نفصل ال sin لحال وال cos لحال .

$$R = \sin(x+t) \left\{ [1] + \left[\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2\right]^1 + \left[\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2\right]^2 + \left[\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2\right]^3 + \cdots \right\}$$

$$+\cos(x-t)\left\{\left[\frac{\lambda\pi}{2}\right]^1+\left[\frac{\lambda\pi}{2}\right]^3+\left[\frac{\lambda\pi}{2}\right]^5+\cdots\right\}$$

$$=\sin(x+t)\,\frac{1}{1-\frac{\lambda^2\pi^2}{4}}+\cos(x-t)\,\frac{\frac{\pi\lambda}{2}}{1-\frac{\lambda^2\pi^2}{4}}$$

$$R=\frac{4\sin(x+t)+2\lambda\pi\cos(x-t)}{4-\lambda^2\pi^2}$$

$$|\lambda^2|<\frac{4}{\pi^2}$$

$$\psi(x)=h(x)+\lambda\int_a^b R(x,t,\lambda)\,h(t)\,dt$$

بالتعويض والمكاملة :

$$\psi(x)=1+\frac{4\lambda}{4-\lambda^2\pi^2}\left[2\cos x+\lambda\pi\sin x\right]$$

المحاضرة السادسة :

مثال :

$$\psi(x)=1+x^2+\frac{1}{\ln 2}\int_0^1\frac{x}{1+t^2}\,\psi(t)\,dt$$

بشرط

تحقق $|\lambda|<\frac{1}{B}$

ويجب التحقق منه بحساب B^2

$$K_1(x,t)=K(x,t)=\frac{x}{1+t^2}$$

$$K_2(x,t)=\int_a^b K_1(x,z)K_1(z,t)\,dz$$

$$=\int_0^1\frac{x}{1+z^2}\cdot\frac{z}{1+t^2}\,dz$$

$$=\frac{x}{1+t^2}\int_0^1\frac{z}{1+z^2}\,dz$$

$$=\frac{x}{2(1+t^2)}\int_0^1\frac{2z}{1+z^2}\,dz=\frac{x}{2(1+t^2)}\left[\ln(1+z^2)\right]_0^1$$