المحاضرة التاسعة :

- مثال :

يفرض أن $\varphi(x) = \int_{-1}^{1} (x\,ch\,t - t^2 sh\,x)\,\varphi(t)\,dt$

المطلوب : إذا كانت نواة k متفسخة فهل يوجد قيم مميزة ؟

أوجد حل هذه المعادلة ؟

أوجد منقول هذه المعادلة ؟

$a_1(x) = x \qquad b_1(t) = ch(t)$

$a_2(x) = sh\,x \qquad b_2(t) = -t^2$

$$a_{11} = \int_{-1}^{1} b_1(t)\,a_1(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \underbrace{t}_{u}\,\underbrace{ch(t)\,dt}_{dv}$$

$$= [t.sh(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} sh(t)\,dt$$

$$= [t.sh(t)]_{-1}^{1} - [ch(t)]_{-1}^{1} = 0$$

$$a_{12} = \int_{-1}^{1} ch(t).sh(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{sh\,2t}{2}\,dt = \left[\frac{ch\,2t}{4}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{4}(ch\,2) - \frac{1}{4}(ch(-2)) = 0$$

$$a_{21} = \int_{-1}^{1} -t^2\,dt = 0$$

$$a_{22} = \int_{-1}^{1} -t^2 sh\,t\,dt = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

← لا يوجد قيم مميزة ← المتجانسة المرفوقة لها حل صفري هو $\psi(x)=0$ ، متجانسة المنقولة لها حل صفري حسب فريدهولم (دون ذكر النفي).

مثال (2):

برهن أنه ليس للمعادلة التكاملية التالية:

$$\psi(x) = h(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(x+t)\,\psi(t)\,dt$$

أي حل عندما $h(x)=x$ ، ولكن لها عدد غير منته من الحلول عندما $h(x)=1$

الحل:

$$K(x,t) = \sin(x+t)$$

$$K(x,t) = \sin x \cos t + \sin t . \cos x$$

النواة متناظرة بالنسبة لـ x, t

$$a_1(x) = \sin x \qquad b_1(t) = \cos t$$

$$a_2(x) = \cos x \qquad b_2(t) = \sin t$$

$$a_{11} = \int_0^{2\pi} \sin t . \cos t \, dt = 0$$

$$a_{12} = \int_0^{2\pi} \cos t . \cos t \, dt = \pi$$

$$a_{21} = \int_0^{2\pi} \sin t . \sin t = \pi$$

$$a_{22} = \int_0^{2\pi} \sin t . \cos t \, dt = 0$$

إذن المعادلات التي تحقق c_k هي:

$$\left.\begin{aligned} c_1 - \lambda\pi c_2 &= h_1 \\ -\lambda\pi c_1 + c_2 &= h_2 \end{aligned}\right\} (*)$$

/ /

$$h_1 = \int_0^{2\pi} h(t) \cdot \cos t \, dt$$

$$h_2 = \int_0^{2\pi} h(t) \cdot \sin t \, dt$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda\pi \\ -\lambda\pi & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2 \pi^2$$

$$\lambda_{1,2} = \mp \frac{1}{\pi}$$

وبالتالي إن المعادلة المفروضة عدداً غير منتهٍ من الحلول وليس لها أي حل

حسب ما يكون الشرط (C) محقق أم لا ؟

شرط التعامد $\quad \int_a^b \varphi^{(m)}(t)\, h(t)\, dt = 0$

$\varphi^{(m)}(t)$ تشكل قاعدة لفضاء الحلول للمعادلة التكاملية المتجانسة الموافقة

للمعادلة التكاملية المفروضة.

$$* \xRightarrow{\text{المتجانسة}} \left.\begin{aligned} c_1 - \lambda\pi c_2 &= 0 \\ -\lambda\pi c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} (**)$$

- من أجل $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$ نعوض في $**$ $\Leftarrow$

$$c_1 - c_2 = 0$$

$$-c_1 + c_2 = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 \; ; \; c_1 = \rho$$

نستنتج أن عدد أبعاد فضاء الحلول لهذه المجموعة يساوي واحد

يمثل الفضاء $\varphi^{(1)}(x) = \rho(\cos x + \sin x)$

نعوض بشرط التعامد (C)

و $\int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t)\, h(t)\, dt = 0$

$$\int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t)\, h(t)\, dt = 0$$

- عندما $h(x) = x$

$$\int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t)(t)\, dt = -2\pi \neq 0$$

ليس للمعادلة التكاملية أي حل

- عندما $h(x) = 1$

$$\int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t)\, dt = 0$$

$\Leftarrow$ المعادلة التكاملية عدد غير منتهٍ من الحلول ماذا أردنا الحصول على هذه الحلول علينا أن نلاحظ ما يلي:

$$h_1 = \int_0^{2\pi} \cos t\, dt = 0$$

$$h_2 = \int_0^{2\pi} \sin t\, dt = 0$$

نلاحظ $h_1 = h_2$ ج * نجد أن $c_1 = c_2$

حل خاص

$$\varphi(x) = h(x) + c_1 a_1(x) + c_2 a_2(x)$$

$$\varphi(x) = 1 + c_1 (\cos x + \sin x)$$

- معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني :

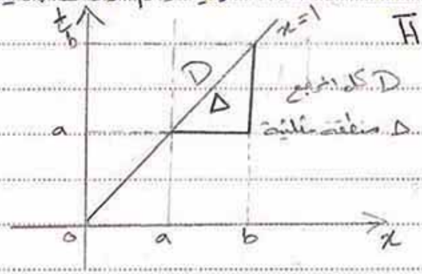
$$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^x H(x,t)\,\psi(t)\,dt$$

الحد الحر — النواة

a ثابت كيفي وغالباً يكون في التمارين 0 ، الحد العلوي متحول .

- سنفرض أن الدالة $h(x)$ كمولة تربيعياً على المجال $[a , b]$

و $H(x,t)$ كمولة تربيعياً على المربع المحدد بالشكل المرسوم جانباً ومن الملائم في معادلة فولتيرا التكاملية أن نردها إلى معادلة فريدهولم وذلك بتعريف نواة جديدة تسمى $\bar{H}(x,t)$



$$D = a \leq x \leq b \quad , \quad a \leq t \leq b$$

- سنفرض $H(x,t)$ مستمرة على المنطقة المثلثية Δ وعلى محيطها في مستوي الاحداثيات XoT والمحددة كما يظهر الشكل أي أنها مستمرة في المثلث Δ المحددة بالمستقيمات $X = t$ و $t = a$ و $x = b$ وعلى محيطه ومن الملائم تعريف نواة جديدة :

$$\bar{H}(x,t) = \begin{cases} H(x,t) & a \leq t \leq x \\ 0 & x < t < b \end{cases}$$

$\bar{H}(x,t)$ محدودة في المثلث Δ حيث Δ مغلق ومحدد أي (متراص) (وكل مستمر على متراص فهو محدود) و $\bar{H}(x,t)$ محدودة في المثلث الذي يحوي Δ

/ /

و $\bar{H}(x,t)$ غير مستمر على المستقيم $x=t$ لأنه من المحتمل أن يكون مستمر مقطعياً على هذا المستقيم $x=t$ وكونه مستمر قطعياً فسيكون هنالك نقاط انقطاع والتي تشكل مجموعة مهملة (مهملة قياسها (0)) وبالتالي التكامل على مجموعة مهملة يساوي صفر.

- نستنتج مما سبق أن النواة $\bar{H}(x,t)$ المعرفة أعلاه كمولة تربيعياً وبالتالي كونها كمولة تربيعياً أصبح بالإمكان ارجاع معادلة فولتيرا الى معادلة فريدهولم و لإيجاد الحل لهذه المعادلة علينا الآن أن نسلك اسلوب النواة الحالة للوصول الى الحل المطلوب و بالتالي يتوجب علينا ايجاد العودة الى النواة المكررة كما يلي:

نوى مكررة

$$\star\ H_1(x,t) = H_b(x,t)$$

$$H_2(x,t) = \int_a^b H_1(x,\xi)\, H_1(\xi,t)\, d\xi$$

بتجزئ التكامل:

$$H_2(x,t) = \underbrace{\int_a^t H_1(x,\xi)H_1(\xi,t)\,d\xi}_{0\,!!} + \int_t^x H_1(x,\xi)\, H_1(\xi,t)\,d\xi + \underbrace{\int_x^b H_1(x,\xi)H_1(\xi,t)\,d\xi}_{0\,!!}$$

حسب تعريف النواة $\bar{H}(x,t)$

$$\star\ H_2(x,t) = \int_t^x H_1(x,\xi)\, H_1(\xi,t)\, d\xi$$

$$\star\ H_3(x,t) = \int_t^x H_1(x,\xi)\, H_2(\xi,t)\, d\xi$$

$$\vdots$$

$$\star\ H_4(x,t) = \int_t^x H_1(x,\xi)\, H_3(\xi,t)\, d\xi$$

$$\vdots$$

$$\star\ H_{n+1}(x,t) = \int_t^x H_1(x,\xi)\, H_n(\xi,t)\, d\xi \qquad (A)$$

/ /

- بما أن H محدودة، إذن يوجد ثابت بحيث يكون:

$$|H_1(x,t)| \leq c$$

نعوض بالعلاقة السابقة

$$|H_2(x,t)| \leq (x-t)\,c^2 \qquad \int_t^x dz = (x-t)$$

$$|H_3(x,t)| \leq c^3 \frac{(x-t)^2}{2!}$$

$$\vdots$$

$$|H_m(x,t)| \leq c^m \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} \quad (\star)$$

$$|H_{m+1}(x,t)| \leq c^{m+1} \frac{(x-t)^m}{m!} \quad (\star\star)$$

لنفرض أن $\star$ صحيحة من أجل m ولنبرهن صحتها من أجل $m+1$

أي يجب الوصول إلى $\star\star$.

- ننطلق من (A)

$$|H_{m+1}(x,t)| = \left| \int_t^x H_1(x,z)\, H_m(z,t)\,dz \right|$$

$$\leq \int_t^x |H_1(x,z) H_m(z,t)|\, dz$$

نعوض كل حد بما يساويه:

$$|H_{m+1}(x,t)| \leq \int_t^x c \cdot \frac{c^m (z-t)^{m-1}}{(m-1)!}\, dz$$

$$|H_{m+1}(x,t)| \leq \int_t^x \frac{c^{m+1} (z-t)^{m-1}}{(m-1)!}\, d(z-t)$$

$$|H_{m+1}(x,t)| \leq \frac{c^{m+1}}{(m-1)!} \int_t^x (\xi - t)^{m-1} \, d(\xi - t)$$

« بالمكاملة والاصلاح »

$$|H_{m+1}(x,t)| \leq \frac{c^{m+1}}{(m-1)!} (x-t)^m$$

حيث الدستور صحيح من أجل أي قيمة لـ λ

- نعلم أن النواة الحالة $R(x,t,\lambda)$

$$R(x,t,\lambda) = H_1 + \lambda H_2 + \lambda^2 H_3 + \lambda^3 H_4 + \cdots + \lambda^m H_{m+1} + \cdots$$

لدينا $|H_m(x,t)| \leq \frac{c^m}{(m-1)!}(x-t)^{m-1}$

نضرب بـ λ^{m-1}

$$|\lambda^{m-1} H_m(x,t)| \leq |\lambda|^{m-1} \frac{c^m}{(m-1)!}(x-t)^{m-1}$$

$$|\lambda^{m-1} H_m(x,t)| \leq \frac{c}{(m-1)!} \cdot |\lambda \cdot c \cdot (x-t)|^{m-1}$$

ومن هنا يتضح أن السلسلة متقاربة بانتظام في المثلث المغلق Δ وذلك من أجل أي قيمة لـ λ وهذا يعني أن النواة الحالة لمعادلة فولتيرا التكاملية هي سلسلة صحيحة في λ وبالتالي إذن مهما كانت قيمة λ ومهما كانت $h(x)$. الطرف الحر لمعادلة التكاملية المفروضة فإنه يوجد لمعادلة فولتيرا التكاملية حلاً وحيداً يعطى بالصيغة التالية :

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^x R(x,t,\lambda)\, h(t)\, dt$$