الفصل الأول

١- مدخل الى البنى الجبرية:

١-١- الجداء الديكارتي:

لتكن B, A مجموعتين غير خاليتين نعرف الجداء الديكارتي للمجموعتين A, B بالشكل

$$A \times B = \{a, b\} : a \in A, b \in B\}$$

- نقول عن أي مجموعة جزئية G من الجداء الديكارتي $A \times B$ أنها بيان:
اذا كان $(a,b) \in G$ فإننا نقول أن العنصر a, b أنهما يرتبطان
نقول عن الثلاثية (A, B, G) أنها علاقة اذا تحقق:
a: يرتبط بالعنصر b وفق علاقة ما.
نرمز للعلاقة بالشكل $\mathcal{R}(A, B, G)$ ونسمي A منطلق العلاقة
و B مستقر العلاقة و G بيان العلاقة

- نقول عن علاقتين $\mathcal{R}_1(A_1, B_1, G_1)$ & $\mathcal{R}_2(A_2, B_2, G_2)$ أنهما متساويتان
اذا وفقط إذا كان $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, $G_1 = G_2$

نذكر بعض خصائص العلاقة

أ): $\mathcal{R}$ انعكاسية إذا تحقق $\forall a \in A : a \mathcal{R} a$
{a يرتبط بنفسه}

ب): $\mathcal{R}$ تناظرية إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall a, b \in A : a \mathcal{R} b = b \mathcal{R} a$$

ج): $\mathcal{R}$ تخالفية إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall a, b \in A : a \mathcal{R} b, b \mathcal{R} a \Rightarrow a = b$$

د): $\mathcal{R}$ تعدية اذا وفقط إذا تحقق

$$\forall a, b, c \in A : \left.\begin{array}{l} a \mathcal{R} b \\ b \mathcal{R} c \end{array}\right\} \Rightarrow a \mathcal{R} c$$

١-٢- التطبيقات:

نقول عن علاقة ما: مثل $\mathcal{R}(A, B, G)$ أنها تطبيق اذا كان
كل عنصر $a \in A$ يرتبط بعنصر وحيد $b \in B$ ونرمز لذلك بالرمز

$$\mathcal{R} : A \longrightarrow B \quad : \forall a \in A : \mathcal{R}(a) = b$$

وبالتالي يكون الشرط الذي يجب أن نتحقق من أجل أن تكون علاقة ما تطبيق هو:

$$a_1, a_2 \in A : a_1 = a_2 \Rightarrow \mathcal{R}(a_1) = \mathcal{R}(a_2)$$

/ /

إذا كانت $f: A \to B$ تطبيق ما نقول إن:

1: f متباين إذا وفقط إذا تحقق:

$a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

2: f غامر إذا وفقط إذا تحقق من أجل كل عنصر $b \in B$ يوجد عنصر $a \in A$ بحيث $f(a) = b$ أي:

$\forall b \in B : \exists a \in A ; f(a) = b$

3: نقول أن f تقابل إذا كان f متباين وغامر

* نقول عن التطبيق $f: A \to A$ إنه تطبيق مطابق إذا تحقق $\forall a \in A : f(a) = a$ ونرمز له بالرمز $id_A: A \to A$ أو $I_A : A \to A$

وإذا كان $f: A \to B$ ، $g: B \to C$ تطبيق ما نعرف التركيب $g \circ f$ على أنه التطبيق $g \circ f: A \to C$ ونقول أن g يلي f

$\forall a \in A : g \circ f(a) = g(f(a))$

مثال 1: إذا كانت A مجموعة كل الأعداد الطبيعية الموجبة:

B مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة تماماً.

نثبت أن الدالة $f: A \to B$ ، $\forall a \in A ; f(a) = 2a$

⊙ f تطبيق لأن $a_1, a_2 \in A : a_1 = a_2 \Rightarrow 2a_1 = 2a_2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2)$

⊙ f متباين لأن:

$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow 2a_1 = 2a_2 \Rightarrow a_1 = a_2$

$\forall b \in B : \exists a \in A ; b = 2a = f(a) \Rightarrow$ f غامر

وبالتالي f تقابل.

تعريف: إذا كان $f: A \to B$ تطبيق ما إذا وجد تطبيق $g: B \to A$ يحقق $g \circ f = I_A$ و $f \circ g = I_B$ فإن f له تقابل هو g ونرمز له بالرمز f^{-1}

مبرهنة: ليكن f و $g: B \to A$ تطبيق فإن القضايا التالية صحيحة:

1: إذا كان f و g متباين فإن $g \circ f$ متباين.

2: إذا كان f و g غامر فإن $g \circ f$ غامر.

3: إذا كان f و g كل منهما تقابل فإن $g \circ f$ تقابل.

4: إذا كان $g \circ f$ متباين فإن f متباين.

تقبل بدون إثبات