مبرهنة <1> :

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع معرفة ومستمرة على مجال مغلق مثل $I = [a, b]$ حيث : $-\infty < a < +\infty$
ولنفرض أن هذه المتتالية تتقارب بانتظام من تابع مثل $f(x)$ على I .. عندئذٍ : يكون التابع $f(x)$ قابلاً للمكاملة على المجال I ويتحقق الآتي :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f_n(x).\,dx\right] = \int_a^b \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\,.\,dx$$

الإثبات :

بحسب الفرضيات نستنتج أن : $f(x)$ مستمر على المجال I .. ومنه يكون $f(x)$ قابلاً للمكاملة على المجال I

ليكن $\varepsilon > 0$ عندئذٍ : $\frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0$ .. وبما أن $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من $f(x)$ على I فإنه :
يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون : $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ عندما $n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I .

ومنه :

$$\left|\int_a^b f_n(x).\,dx - \int_a^b f(x).\,dx\right| \xrightarrow{\text{حسب خواص التكامل}} = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)].\,dx\right|$$

ومن خواص التكامل أيضاً : ((القيمة المطلقة لتكامل تابع أصغر أو تساوي تكامل القيمة المطلقة للتابع))

$$\Rightarrow \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)].\,dx\right| \leq \int_a^b |[f_n(x) - f(x)]|.\,dx$$

ومنه : بفرض $n \geq N_0$ نجد مايلي :

$$\left|\int_a^b f_n(x).\,dx - \int_a^b f(x).\,dx\right| \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.\,dx = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,.(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

إذاً من أجل $\varepsilon > 0$ يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون :

$$\left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)].\,dx\right| < \varepsilon \quad , \quad n \geq N_0 \text{ عندما}$$

وهذا يعني أنَّ :

$$\int_a^b \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx = \int_a^b f(x).dx$$

ولكن :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

إذاً تم المطلوب إثباته .

ملاحظة :

إن الشروط المذكورة في المبرهنة السابقة هي شروط كافية وغير لازمة وسنضرب مثالاً يبين ذلك نطرح فيه متتالية توابع ليست متقاربة بانتظام ولكن تحقق أن ((تكامل النهاية يساوي نهاية التكامل)) .

مثال :

لنأخذ المتتالية التي حدها العام $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ والتي حدودها معرفة على المجال $I = [0,1]$ فتكون هذه المتتالية متقاربة من تابع النهاية لها بشكل غير منتظم على المجال I وذلك بملاحظة الآتي :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$$

لنفرض مؤقتاً أن هذه المتتالية تتقارب بانتظام من $f(x) = 0$ على المجال $I = [0,1]$
عندئذٍ : $\forall\ \varepsilon > 0$ فإنه يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$
عندما $n \geq N_0$ وَ $\forall x \in I$ ..

لنأخذ الآن $\varepsilon = \frac{1}{2}$ عندئذٍ : يوجد $N \neq 0$ بحيث يكون : $|f_n(x)| = f_n(x) < \frac{1}{2}$
عندما $n \geq N$ وَ $\forall x \in I$ ..

ثم لناخذ $N \ngeqq n$ فيكون $n > 1$ ((لأن $N \geq 1$)) ومنه :
$[0,1] = I \in \frac{1}{n} \Leftarrow 1 > \frac{1}{n} > 0$ وبالتالي نجد أن :

$$\frac{1}{2} > f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n.\frac{1}{n}}{1+n^2.\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

أي أن : $\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ وهذا مستحيل .. إذاً فالتقارب لهذه المتتالية غير منتظم على المجال $I = [0,1]$ ..

وأيضاً :

$$\int_0^1 f_n(x)\,.\,dx = \int_0^1 \frac{n\,.\,x}{1+n^2.\,x^2}\,.\,dx = \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{2n^2.\,x}{1+n^2.\,x^2}\,.\,dx$$
$$= \frac{1}{2n}\left[\ln(1+n^2x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2n}\left[\ln(1+n^2-0)\right] = \frac{\ln(1+n^2)}{2n}$$

فلنحسب الآن نهاية هذا التكامل :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,.\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2)}{2n} \xRightarrow{\text{حسب أوبيتال}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n^2} = 0$$

ولنحسب أيضاً تكامل النهاية :

$$\int_0^1\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right].\,dx \xRightarrow{\text{حسب المبرهنة}} = \int_0^1 f(x).\,dx = \int_0^1 0.\,dx = 0$$

$$\xRightarrow{\text{فنجد أنَّ}} \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,.\,dx = \int_0^1\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right].\,dx = 0$$

مبرهنة <2> :

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع معرفة على مجال مغلق مثل $I=[a,b]$ ..
ولنفرض أنَّ هذه المتتالية تحقق الشروط الآتية :

- (1 هذه المتتالية تتقارب من تابع مثل $f(x)$ على مجال I .
- (2 حدود هذه المتتالية قابلة للإشتقاق على المجال I .
- (3 المشتقات $f_n'(x)$ حيث : $(n=1,2,3,\dots\dots)$ هي توابع مستمرة على المجال I .
- (4 متتالية المشتقات $\{f_n'(x)\}$ تتقارب بانتظام من تابع مثل $g(x)$ على المجال I .

عندئذٍ : يكون التابع $f(x)$ قابلاً للإشتقاق على I ومشتقه على I هو $g(x)$ .. أي أن :
$f'(x)=g(x) \quad ,\forall\, x \in I$ ويكون أيضاً :

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]' = f'(x)$$

الإثبات :

حسب الشرطين (3) وَ (4) نستنتج أنَّ $g(x)$ مستمر على I ..

ومنه يكون $g(x)$ قابلاً للمكاملة على I .. ومنه يوجد له تابع أصلي على I وليكن $G(x)$

ومنه : $G'(x) = g(x)$ وأيضاً بفرض $x \epsilon I = [a,b]$ .. نجد أنه ولأجل $t \epsilon I$

$$G(x) - G(a) = [G(t)]_a^x = \int_a^x g(t)\,.\,dt = \int_a^x \left[\lim_{n\to\infty} f_n'(t)\right].\,dt$$

وحسب المبرهنة السابقة :

$$\int_a^x \left[\lim_{n\to\infty} f_n'(t)\right].\,dt = \lim_{n\to\infty}\left[\int_a^x f_n'(t)\,.\,dt\right] \Rightarrow = \lim_{n\to\infty} [f_n(x)]_a^x$$
$$= \lim_{n\to\infty}[f_n(x) - f_n(a)] = \lim_{n\to\infty} f_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(a)$$

وبما أن : $\forall a \epsilon I$, $f_n(a) \longrightarrow f(a)$ لأن : f_n متتالية عددية ..

$$\Rightarrow = f(x) - f(a)$$

إذاً :

$$G(x) - G(a) = f(x) - f(a) \ \Rightarrow f(x) = G(x) - G(a) + f(a)$$

ومنه :

$$f'(x) = G'(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad g(x) = [f(x)]'$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left[\lim_{n\to\infty} f_n'(x)\right]' \quad , \forall\, x \,\epsilon\, I$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} [f_n(x)]' = \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]'$$

وهو المطلوب ..

مبرهنة <3> : (هـامة لأجل التمارين)

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع معرفة على مجال مثل I ..
ولنفرض أنَّ هذه المتتالية تتقارب من تابع مثل $f(x)$ على مجال I ..
عندئذٍ : تكون القضيتين التاليتين متكافئتين ..

1) - المتتالية $\{f_n(x)\}$ تتقارب بانتظام على المجال I .
2) - بفرض : $M_n = sup_{x\,\epsilon\, I}\, |f_n(x) - f(x)|$ من أجل كل n فإنه :
$\left(\lim_{n\to\infty} M_n = 0 \right)$

الإثبات : ((في المحاضرة القادمة))

تـمـريـن :

ادرس التقارب من حيث كونه منتظماً أم غير منتظم لمتتاليات التوابع الآتية :

1) $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \quad , \quad I = [0,1]$
2) $f_n(x) = \sin\frac{x}{n} \quad , \quad I = \mathcal{R}$
3) $f_n(x) = \sin\frac{x}{n} \quad , \quad I = [0\,,\,\frac{\pi}{2}]$
4) $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad , \quad I = [0,+\infty[$

" انتهت المحاضرة " ....