ثانيا : طريقة لاغرانج :

ليكن $y = f(x)$ تابع معرف بالجدول التالي :

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1	y_2	...	y_n

نعرف حدوديات لاغرانج على الشكل التالي :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\dots(x_0-x_n)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)}$$

$$\vdots$$

$$L_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})}$$

نلاحظ أن حدوديات لاغرانج هي حدوديات من الدرجة n حيث يكون :

$$\forall i,j \in \{0,1,2,\dots,n\} \Rightarrow L_i(x_j) = \begin{cases} 1 : j = i \\ 0 : \text{j} \neq \text{i} \end{cases}$$

وبالتالي تكون حدودية الاستيفاء بطريقة لاغرانج على الشكل :

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, f(x_i)}$$

حيث $P_{n(x_i)} = f(x_i)\ \forall i \in \{0,1,2,\dots,n\}$

مثال :

باستخدام طريقة لاغرانج أوجد حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول :

x	-1	2	3
$f(x)$	1	3	4

الحل :

نوجد حدوديات لاغرانج :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(-3)(-4)} = \frac{x^2-5x+6}{12}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-3)}{(3)(-1)} = \frac{x^2-2x-3}{-3}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(4)(1)} = \frac{x^2-x-2}{4}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, f(x_i) = \frac{1(x^2-5x+6)}{12} + \frac{3}{-3}(x^2-2x-3) + \frac{4}{4}(x^2-x-2)$$

$$= \frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{12}x + \frac{3}{2}$$

مثال :

باستخدام طريقة لاغرانج أوجد حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول :

x	-2	0	1	2
$f(x)$	-3	1	0	5

الحل :

نوجد حدوديات لاغرانج :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-2)(-3)(-4)} = \frac{x^3-3x^2+2x}{-24}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(2)(-1)(-2)} = \frac{x^3-x^2-4x+4}{4}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+2)(x-0)(x-2)}{(3)(1)(-1)} = \frac{x^3-4x}{-3}$$

$$L_3(x) = \frac{(x+2)(x-0)(x-1)}{(4)(2)(1)} = \frac{x^3+x^2-2x}{8}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, f(x_i)$$

$$= \frac{-3\times(x^3-3x^2+2x)}{-24} - \frac{1\times(x^3-x^2-4x+4)}{4} + \frac{0\times(x^3-4x)}{-3} + \frac{5\times(x^3+x^2-2x)}{8}$$

$$= \frac{8x^3+0x^2-16x+8}{8} = x^3 - 2x + 1$$

وظيفة :

1) اعد التمرين السابق باستخدام الطريقة العامة ثم أوجد بشكل تقريبي قيمة $f(-1)$

2) باستخدام الطريقة العامة و طريقة لاغرانج أوجد حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول :

x	0	1	2	4
$f(x)$	-3	0	11	81

... انتهت المحاضرة (9) ...