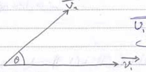
العمليات على الأشعة:

١) الجداء السلمي (العددي): تعريف الجداء السلمي لشعاعين
ليكن لدينا $\vec{v_1}$ ، $\vec{v_2}$ شعاعين مستويين الزاوية بينهما θ (يقعان في مستوي واحد) نعرف الجداء السلمي لهذين الشعاعين بأنه مقدار سلمي يساوي جداء طويلة الأول بطويلة الثاني بجيب تمام الزاوية بينهما.



$$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}=|\vec{v_1}|\cdot|\vec{v_2}|\cdot\cos\theta$$

يسمى الجداء السلمي بالجداء الداخلي
وهو يتمتع بالخاصية التالية:
ان الجداء الداخلي لشعاعين عملية تبديلية (أبدالية) أي
$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}=\vec{v_2}\cdot\vec{v_1}$ حيث يكون $0\leq\theta\leq 2\pi$

تطبيق: $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=|\vec{i}|\,|\vec{i}|\cos\theta=1$

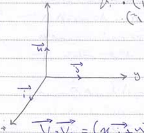
$$\left.\begin{aligned}\vec{i}\cdot\vec{k}&=\\ \vec{i}\cdot\vec{j}&=\\ \vec{j}\cdot\vec{k}&=\end{aligned}\right\} 0$$

لأن $\theta=\frac{\pi}{2}$ و $\cos\theta=0$

الجداء السلمي أو العددي يقبل التوزيع على الجمع من اليمين ومن اليسار.

$$\vec{v_1}\cdot(\vec{v_2}+\vec{v_3})=\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}+\vec{v_1}\cdot\vec{v_3}$$

- العبارة التحليلية للجداء الداخلي (مهمة جداً)



$$\vec{v_1}=(x_1,y_1,z_1)$$
$$\vec{v_2}=(x_2,y_2,z_2)$$
$$\vec{v_1}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$$
$$\vec{v_2}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}&=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\cdot(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})\\
&=(x_1\vec{i}\cdot x_2\vec{i})+(x_1\vec{i}\cdot y_2\vec{j})+(x_1\vec{i}\cdot z_2\vec{k})\\
&\quad(y_1\vec{j}\cdot x_2\vec{i})+(y_1\vec{j}\cdot y_2\vec{j})+(y_1\vec{j}\cdot z_2\vec{k})\\
&\quad(z_1\vec{k}\cdot x_2\vec{i})+(z_1\vec{k}\cdot y_2\vec{j})+(z_1\vec{k}\cdot z_2\vec{k})\\
&=x_1x_2(\vec{i}\cdot\vec{i})+x_1y_2(\vec{i}\cdot\vec{j})+x_1z_2(\vec{i}\cdot\vec{k})\\
&\quad y_1x_2(\vec{j}\cdot\vec{i})+y_1y_2(\vec{j}\cdot\vec{j})+y_1z_2(\vec{j}\cdot\vec{k})\\
&\quad z_1x_2(\vec{k}\cdot\vec{i})+z_1y_2(\vec{k}\cdot\vec{j})+z_1z_2(\vec{k}\cdot\vec{k})\end{aligned}$$

/ /

$$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

- أحسب الزاوية الكائنة بين الشعاعين $\vec{V_1} = \vec{i} - \vec{k}$ ، $\vec{V_2} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

نعلم أن الجداء الداخلي لشعاعين يعطى بالعلاقة

$$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = |\vec{V_1}|\cdot|\vec{V_2}|\cdot\cos\theta \quad --- (*)$$

$$|\vec{V_1}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

من (*) نحصل على

$$\cos\theta = \frac{\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}}{|\vec{V_1}|\,|\vec{V_2}|}$$

$$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = (1.2) + (0.1) + (1.1) = 1$$

$$|\vec{V_1}| = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{V_2}| = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

وبالتالي:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

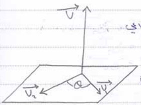
الجداء الشعاعي (الخارجي):

ليكن لدينا الشعاعين $\vec{V_1}, \vec{V_2}$ نعرف الجداء الشعاعي لهما بأنه شعاع ثالث $\vec{V}$ يعامد مستوى الشعاعين $\vec{V_1}, \vec{V_2}$ واتجاهه يكون: بحيث تؤلف الأشعة $(\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V})$ ثلاثية موجبة بمعنى أنه اذا وقف الراصد باتجاه $\vec{V}$ ونظر إلى الشعاع $\vec{V_1}$ وجد الشعاع $\vec{V_2}$ على يساره ويمكن قراءة الجداء الشعاعي بالشعاع الخارجي

أو طويلة الجداء الشعاعي:

$$|\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}| = |\vec{V_1}|\cdot|\vec{V_2}|\sin\theta$$

حيث θ هي الزاوية الكائنة بين $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ ، $0 \leq \theta \leq 2\pi$



الجداء الشعاعي ليس عملية ابدالية

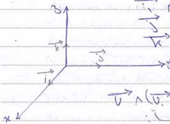
اذا توازى الشعاعين $\vec{V_1}, \vec{V_2}$ فإن الجداء الشعاعي (الخارجي) يساوي الصفر الشعاعي $\vec{0}$.

جداء شعاعي خارجي $\vec{V_1} \parallel \vec{V_2} \iff \vec{V_1}\wedge\vec{V_2} = \vec{0}$

جداء سلمي (داخلي) $\vec{V_1} \perp \vec{V_2} \iff \vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = 0$

/ /

تطبيق: من أجل أشعة الواحدة المحمولة على المحاور الإحداثية القائمة



$$\begin{cases}\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k} \\ \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i} \\ \vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}\end{cases} \qquad \begin{cases}\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{0} \\ \vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{0} \\ \vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}\end{cases}$$

ان عملية الجداء الشعاعي تقبل التوزيع على

عملية الجمع:

$$\vec{V}\wedge(\vec{V_1}+\vec{V_2})=(\vec{V}\wedge\vec{V_1})+(\vec{V}\wedge\vec{V_2})$$

حساب الجداء الخارجي لشعاعين تحليلياً:

ليكن لدينا الشعاع

$$\vec{V_1}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$$

$$\vec{V_2}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$$

$$\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\wedge(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})$$

$$=(x_1\vec{i}\wedge x_2\vec{i})+(x_1\vec{i}\wedge y_2\vec{j})+(x_1\vec{i}\wedge z_2\vec{k})$$

$$+(y_1\vec{j}\wedge x_2\vec{i})+(y_1\vec{j}\wedge y_2\vec{j})+(y_1\vec{j}\wedge z_2\vec{k})$$

$$+(z_1\vec{k}\wedge x_2\vec{i})+(z_1\vec{k}\wedge y_2\vec{j})+(z_1\vec{k}\wedge z_2\vec{k})$$

$$=\vec{0}+x_1y_2\vec{k}-x_1z_2\vec{j}$$

$$-y_1x_2\vec{k}+\vec{0}+y_1z_2\vec{i}$$

$$+z_1x_2\vec{j}-z_1y_2\vec{i}+\vec{0}$$

$$\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}=(y_1z_2-z_1y_2)\vec{i}+(-x_1z_2+z_1x_2)\vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k}$$

ولكن هنالك طريقة أخرى لإيجاده وهي بتلك المحدد التالي

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=(y_1z_2-y_2z_1)\vec{i}+(x_2z_1-x_1z_2)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}$$

- أحسب طويلة الجداء الخارجي لشعاعين: -

$$\vec{V_1}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$$

$$\vec{V_2}=-\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$$

$$\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2\end{vmatrix}=-5\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$$

$$|\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}|=\sqrt{25+1+9}$$

$$=\sqrt{35}$$

الجداء المختلط الخارجي:

أحسب مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على الشعاعين

الجداء المختلط لثلاثة أشعة: نتحدث عن جداء مختلط لثلاثة أشعة أنه عدد $\vec{V_1}(x_1,y_1,z_1)$ إلى $\vec{V_2}(x_2,y_2,z_2)$ ، $\vec{V_3}(x_3,y_3,z_3)$ هو عبارة عن $\vec{V_3}.(\vec{V_1}\wedge\vec{V_2})$ ونرمز له بالرمز $(\vec{V_1},\vec{V_2},\vec{V_3})$ ولحساب الجداء المختلط لثلاثة أشعة من الجداء الخارجي لشعاعين $\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}$ و $\vec{V_3}$ وناتج الجداء المختلط هو عدد ويعود السبب في ذلك إلى أن ناتج $\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}$ هو شعاع وناتج الشعاع الناتج والشعاع $\vec{V_3}$ هو عدد. $\vec{V_1}$ هو ناتج $\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}$

- القيمة المطلقة للجداء المختلط هي حجم متوازي السطوح المنشأ من هذه الأشعة.

خواص الجداء المختلط:

1) الشرط اللازم والكافي لتكون الأشعة $(\vec{V_1},\vec{V_2},\vec{V_3})$ موازية لمستوٍ واحد هو أن يكون جداؤها المختلط يساوي الصفر.

2) إن تغيير ترتيب شعاعين بالجداء المختلط لا يغير القيمة المطلقة لهذا الشعاع وإنما يغير الإشارة.

3) إذا ضربنا أحد أشعة الجداء المختلط بعدد فإن الجداء يضرب بهذا العدد.

- قيمة الجداء المختلط تُعطى: $(\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}).\vec{V_3}$

$$\vec{V_1}\wedge\vec{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} + (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}$$

نلاحظ أن هذه القيمة ماهي إلا النتيجة شرط الجداء التالي: $(\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}).\vec{V_3}$

$$(\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}).\vec{V_3} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

- من المعلوم في الجبر الخطي أن الشرط اللازم والكافي كي تكون ثلاثة أشعة $\vec{V_1},\vec{V_2},\vec{V_3}$ مرتبطة خطياً هو أن يكون جداؤها المختلط يساوي الصفر أي أن تكون القيمة العددية للمحدد السابقة تساوي 0 وبتعبير آخر الشرط اللازم والكافي لوقوع ثلاثة أشعة في مستوٍ واحد هو أن يكون