الزمرة الجزئية الناظمية

مبرهنة : لتكن G زمرة , القضايا التالية صحيحة :

1 - تقاطع أي أسرة من الزمر الجزئية الناظمية هو زمرة جزئية ناظمية

2 - المجموعة : $\mathbb{Z}(G) = \{ a : a \in G \quad , x \cdot a = a \cdot x \quad \forall\, x \in G \}$

والتي تسمى مركز الزمرة هي زمرة ناظمية في G .

الإثبات :

1 - لتكن $\mathcal{L}$ أسرة من الزمر الجزئية الناظمية في G , ولنفرض أنّ :

$$K = \bigcap_{B \in \mathcal{L}} B$$

وجدنا سابقا أنّ K زمرة جزئية , بما أنه أيا كان $D \in \mathcal{L}$ فإنّ D زمرة جزئية ناظمية في G

ليكن $a \in G$ ولنبرهن على أنّ $a \cdot K \cdot a^{-1} \subseteq K$:

ليكن $x \in a \cdot K \cdot a^{-1}$ عندئذٍ يوجد $h \in K$ بحيث : $x = a \cdot h \cdot a^{-1}$

$$h \in K = \bigcap_{B \in \mathcal{L}} B \subset B$$

وبالتالي $x = a \cdot h \cdot a^{-1} \in B$ وذلك أيا كان $B \in \mathcal{L}$, وبما أنّ B زمرة جزئية ناظمية في G فإنّ :

$$x = a \cdot h \cdot a^{-1} \in \bigcap_{B \in \mathcal{L}} B = K$$

و مما سبق نجد أنّ $a \cdot h \cdot a^{-1} \subseteq K$ أي أنّ K زمرة جزئية ناظمية .

2 - $\mathbb{Z}(G) \subseteq G$ لنثبت أنها ليست خالية :

$$\forall\, x \in G \quad e \cdot x = x \cdot e \Longrightarrow e \in \mathbb{Z}(G) \neq \emptyset$$

ليكن $a, b \in \mathbb{Z}(G)$ عندئذٍ :

$$\forall\, x \in G \begin{cases} a \cdot x = x \cdot a \\ b \cdot x = x \cdot b \end{cases}$$

$$b \cdot x = x \cdot b \Longrightarrow x = b^{-1} \cdot x \cdot b \Longrightarrow x \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot x$$

لنبرهن أنّ $a \cdot b^{-1} \in \mathbb{Z}(G)$:

$$x(a \cdot b^{-1}) = (x \cdot a)b^{-1} = (a \cdot x)b^{-1} = b^{-1}(a \cdot x) = (b^{-1} \cdot a)x = (a \cdot b^{-1})x$$

وبذلك يكون $a \cdot b^{-1} \in \mathbb{Z}(G)$ ومنه $\mathbb{Z}(G)$ زمرة جزئية في G .

لنبرهن أنّ الزمرة $\mathbb{Z}(G)$ ناظمية في G , ليكن $c \in G$ ولنبرهن على أنّ $c \cdot \mathbb{Z}(G) \cdot c^{-1} \subseteq \mathbb{Z}(G)$

ليكن $w \in c \cdot \mathbb{Z}(G) \cdot c^{-1}$ ومنه يكون يوجد $u \in \mathbb{Z}(G)$ بحيث يحقق :

$$w = c \cdot u \cdot c^{-1} = u \cdot c \cdot c^{-1} = u \in \mathbb{Z}(G)$$

ومنه يكون $\mathbb{Z}(G)$ ناظمية .

نتيجة : إذا كانت الزمرة G تبديلية فإنّ $G = \mathbb{Z}(G)$.

مبرهنة :

لتكن G زمرة , H, K زمر جزئية في G , عندئذٍ القضايا التالية صحيحة :

1 - إذا كان $H \subseteq K \subseteq G$ وكانت H ناظمية في G فإنّ H تكون ناظمية في K .

2 - إذا كان $(G : H) = 2$ عندئذٍ تكون الزمرة الجزئية H ناظمية في G .

الإثبات :

1 - لنبرهن على أنّ H ناظمية في K , أي لنبرهن أنّ : $k \cdot H \cdot k^{-1} \subseteq H \;\; ; \;\; \forall\, k \in K$

ليكن $k \in K$ عندئذٍ $k \in G$ ومنه حسب الفرض $k \cdot H \cdot k^{-1} \subseteq H$

2 - لنفرض أنّ $(G : H) = 2$ أي يوجد مرافقتين الأولى H ولتكن الثانية $a \cdot H$

نميز حالتين :

$a \in H$ عندئذٍ $a \cdot H = H \cdot a = H$ أي حسب التعريف تكون H ناظمية في G .

$a \notin H$ ومنه كون المرافقات تشكل تجزئة : $G = H \cup a \cdot H$

$$a \cdot H = G \backslash H = H \cdot a$$

ومنه تكون H ناظمية في G .

تمرين :

أعط مثال تبين من خلاله أنّ جداء زمرتين جزئيتين ليس بالضرورة أن يكون زمرة جزئية .

مبرهنة : لتكن G زمرة , A,B زمر جزئية في G , الشروط التالية متكافئة :

1- $A\cdot B$ زمرة جزئية في G .

2- $A\cdot B=\langle A\cup B\rangle$.

3- $A\cdot B=B\cdot A$.

الإثبات : $(1\Rightarrow 2)$: لنفرض $A\cdot B$ زمرة جزئية في G , لدينا :

$$\left.\begin{array}{l}\forall\, a\in A\ \ ;a=a\cdot \overset{e\in B}{e}\ \in A\cdot B\\ \forall\, b\in B\ \ ;b=\underset{e\in A}{e}\cdot b\ \in A\cdot B\end{array}\right\}\Longrightarrow A\cup B\subseteq A\cdot B$$

والزمرة المولدة بالاجتماع أصغر زمرة تحوي $A\cup B$ أي : $\langle A\cup B\rangle\subseteq A\cdot B$

ليكن $x\in A\cdot B$ عندئذٍ يوجد $a\in A$, $b\in B$ بحيث $x=a\cdot b$ وبما أنّ $a,b\in A\cup B$

$$A\cup B\subseteq\langle A\cup B\rangle$$

$$x=a\cdot b\in\langle A\cup B\rangle\Longrightarrow A\cdot B\subseteq\langle A\cup B\rangle\overset{\text{من الاحتوائين}}{\Longrightarrow}A\cdot B=\langle A\cup B\rangle$$

$(2\Rightarrow 3)$: لنفرض أنّ $A\cdot B=\langle A\cup B\rangle$

ليكن $x\in A\cdot B$ عندئذٍ يوجد $a\in A$, $b\in B$ بحيث $x=a\cdot b$

ومنه $x^{-1}\in A\cdot B$ وأيضاً يكون يوجد $a_1\in A$, $b_1\in B$ بحيث $x^{-1}=a_1\cdot b_1$

$$x=(x^{-1})^{-1}=(a_1\cdot b_1)^{-1}=b_1^{-1}\cdot a_1^{-1}$$

$$b_1^{-1}\cdot a_1^{-1}\in B\cdot A\Longrightarrow A\cdot B\subseteq B\cdot A$$

ليكن $y\in \overset{B\cdot A\subseteq G}{B\cdot A}$ عندئذٍ يوجد $b_2\in B$, $a_2\in A$ بحيث $y=b_2\cdot a_2$

$$y=(y^{-1})^{-1}=(a_2^{-1}\cdot b_2^{-1})^{-1}\in A\cdot B\Longrightarrow y\in A\cdot B\Longrightarrow B\cdot A\subseteq A\cdot B$$

ومن الاحتوائين $A\cdot B\subseteq B\cdot A$, $B\cdot A\subseteq A\cdot B$ يكون $A\cdot B=B\cdot A$

$(3\Rightarrow 1)$: بما أنّ A,B ليستا خاليتين فالجداء ليس خالي : $e=e\cdot e\in A\cdot B$

ليكن $x,y\in A\cdot B$ عندئذٍ يوجد $x=a_3\cdot b_3$, $y=a_4\cdot b_4$ حيث $a_3,a_4\in A$, $b_3,b_4\in B$

$$x\cdot y^{-1}=(a_3\cdot b_3)(a_4\cdot b_4)^{-1}=a_3\cdot\underbrace{\overbrace{b_3\cdot b_4^{-1}}^{\in B}\cdot a_4^{-1}}_{\in B\cdot A=A\cdot B}$$

ومنه يوجد $a_5\in A$, $b_5\in B$ بحيث : $a_3\cdot b_3\cdot b_4^{-1}\cdot a_4=a_3\cdot a_5\cdot b_5$

وبما أنّ $x\cdot y^{-1}=a_3\cdot a_5\cdot b_5\in A\cdot B$ تكون $A\cdot B$ زمرة جزئية في G .

مبرهنة :

لتكن G زمرة , A, B زمرة جزئية في G , إذا كانت B ناظمية في G عندئذٍ يكون :

1 - $A \cdot B$ زمرة جزئية في G .

2 - $A \cdot B = \langle A \cup B \rangle$.

3 - $A \cdot B = B \cdot A$.

الإثبات :

1 - لنفرض أنّ الزمرة الجزئية B ناظمية في G عندئذٍ $\emptyset \neq A \cdot B \subseteq G$

ليكن $x, y \in A \cdot B$ عندئذٍ : $x = a_1 \cdot b_1$, $y = a_2 \cdot b_2$ بحيث $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$

$$x \cdot y^{-1} = a_1 \cdot b_1 \cdot b_2^{-1} \cdot a_2^{-1} = a_1(b_1 \cdot b_2^{-1})a_2 = a_1 \cdot e(b_1 \cdot b_2^{-1})a_2^{-1}$$

$$= \underbrace{a_1 \cdot a_2^{-1}}_{\in A} \cdot \underbrace{a_2(b_1 \cdot b_2^{-1})a_2^{-1}}_{\subseteq B \text{ ناظمية}} \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in A \cdot B$$

ومنه تكون $A \cdot B$ زمرة جزئية في G .

كل من 2 - و 3- ينتج من 1- والمبرهنة الأخيرة .

زمــرة الخـــارج

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G , لنأخذ المجموعة :

$$G/_H = \{ a \cdot H \ : \ a \in G \}$$

ونعرف علاقة التكافؤ بالشكل التالي :

$$\forall a, b \in G \quad a\rho b \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot b^{-1} \in H \Leftrightarrow b \cdot H = a \cdot H \\ \Leftrightarrow H \cdot a = H \cdot ba^{-1} \cdot b \in H \end{cases} \text{ يكفي إحداها}$$

هي علاقة تكافؤ .. وصفوف تكافؤ هذه العلاقة هي $G/_H$ " *وظيفة* "

... انتهت المحاضرة ...