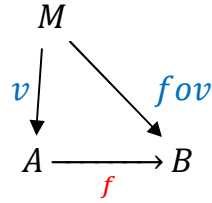


التشاكلات المتخلصة :

تعريف : ليكن $f: A \longrightarrow B$ تشاكل مودولي , M مودول على الحلقة R وليكن المخطط :

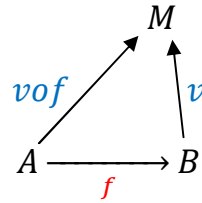


فنجد أنه يمكن تعريف تشاكل :

$$f_*: \text{Hom}(M, A) \longrightarrow \text{Hom}(M, B)$$

$$f_*(v) = f \circ v$$

وكذلك لناخذ المخطط :



وبذلك يمكن تعريف تشاكل :

$$f^*: \text{Hom}(B, M) \longrightarrow \text{Hom}(A, M)$$

$$f^*(v) = v \circ f$$

يسمى كل من f_* , f^* تشاكل مستخلص من التشاكل f .

مبرهنة : إذا كان $f, g \in \text{Hom}(A, B)$, $h, k \in \text{Hom}(B, C)$ فإن :

$$1) (f + g)_* = f_* + g_*$$

$$2) (f + g)^* = f^* + g^*$$

$$3) (h \circ f)_* = h_* \circ f_*$$

$$4) (h \circ f)^* = h^* \circ f^*$$

المحاضرة (8)

$f, g: A \longrightarrow B$ الإثبات: (1)

$$f_*, g_*: Hom(M, A) \longrightarrow Hom(M, B)$$

$$f + g: A \longrightarrow B$$

$(f + g)_*: Hom(M, A) \longrightarrow Hom(M, B)$ واضح أن:

$$f_* + g_*: Hom(M, A) \longrightarrow Hom(M, B)$$

$$(f + g)_*(v) = (f + g) \circ (v) = (fov) + (gov) = f_*(v) + g_*(v)$$

وبالتالي (1) محققة وبنفس الطريقة نثبت صحة (2).

$hof: A \longrightarrow C$ إثبات (3):

$$(hof)_*: Hom(M, A) \longrightarrow Hom(M, C)$$

$$h_* \circ g_*: Hom(M, A) \longrightarrow Hom(M, C)$$

أيًا كان $v \in Hom(A, M)$ فإن:

$$(hof)_*(v) = (hof) \circ (v) = ho(fov) = h_*(fov) = h_*(f_*)(v) = (h_* \circ f_*)(v)$$

وبالتالي (3) محققة وبنفس الطريقة نثبت صحة (4).

مبرهنة: إذا كانت متتالية تامة من التشاكلات المودولية:

$$(I) \dots 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

فإن: 1- $0 \longrightarrow Hom(M, A') \xrightarrow{f_*} Hom(M, A) \xrightarrow{g_*} Hom(M, A'') \longrightarrow 0$ متتالية تامة

2- $0 \longrightarrow Hom(A'', M) \xrightarrow{g^*} Hom(A, M) \xrightarrow{f^*} Hom(A', M) \longrightarrow 0$ متتالية تامة

الإثبات: 1- يكفي إثبات أن: $\begin{cases} f_* \text{ متباين} \\ Im f_* = Ker g_* \end{cases}$

أيًا كان $v' \in Ker f_*$ فإن $f_*(v') = 0$

$$fov' = f \circ 0 = 0 ; 0 \text{ التطبيق الصفري}$$

المحاضرة (8)

وبما أن المتتالية (I) تامة فإن التشاكل f متباين وبالتالي f قابل للاختصار من اليسار وبالتالي $v' = 0$ ومنه يكون f_* متباين.

أو يمكن إثبات التباين كما يلي، نأخذ $v'_1, v'_2 \in \text{Hom}(M, A')$ بحيث:

$$f_*(v'_1) = f_*(v'_2) \Rightarrow f \circ v'_1 = f \circ v'_2 \Rightarrow v'_1 = v'_2 \quad (\text{لأن } f \text{ متباين يمكن الاختزال})$$

كما أنه أياً كان $v \in \text{Im} f_*$ فإنه يوجد $v' \in \text{Hom}(M, A')$ بحيث:

$$v = f_*(v') = f \circ v'$$

$$g_*(v) = g_*(f \circ v') = g \circ (f \circ v') = (g \circ f)(v') = 0 \quad (\text{لأن (I) تامة أي } g \circ f = 0)$$

أي $v \in \text{ker} g_*$ وبالتالي $\text{Im} f_* \subseteq \text{ker} g_*$... (1)

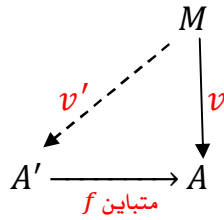
ومن جهة أخرى: أياً كان $v \in \text{ker} g_*$ فإن:

لأن (I) متتالية تامة

$$g_*(v) = 0 \Rightarrow g \circ v = 0 \Rightarrow \text{Im} v \subseteq \overline{\text{ker} g} = \text{Im} f$$

وبما أن التشاكل f متباين فحسب المبرهنة (2-7) فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $v': M \rightarrow A'$

يحقق: $f \circ v' = v$ وبالتالي $f_*(v') = v \in \text{Im} f_*$ وبالتالي:



$\text{ker} g_* \subseteq \text{Im} f_*$... (2), ومن الاحتوائين يكون $\text{Im} f_* = \text{ker} g_*$

وبذلك تكون 1- متتالية تامة

2- يكفي أن نثبت: $\begin{cases} g^* \text{ متباين} \\ \text{Im} g^* = \text{ker} f^* \end{cases}$

أياً كان $v''_1, v''_2 \in \text{Hom}(A'', M)$ بحيث:

$$g^*(v''_1) = g^*(v''_2) \Rightarrow v''_1 \circ g = v''_2 \circ g$$

وبما أن g غامر فهو قابل للاختزال من اليمين أي: $v''_1 = v''_2$ ومنه يكون g^* متباين

من جهة أولى أياً كان $v \in \text{Im} g^*$ فإنه يوجد $v'' \in \text{Hom}(A'', M)$ بحيث:

$$v = g^*(v'') = v'' \circ g$$

عندئذ يكون:

لأن (I) تامة $g \circ f = 0$

$$f^*(v) = f^*(v'' \circ g) = (v'' \circ g) \circ f = v'' \circ \overbrace{(g \circ f)} = v'' \circ 0 = 0 ; \quad \text{التطبيق الصفري } 0$$

المحاضرة (8)

إذن $v \in \ker f^*$ وبالتالي $Img^* \subseteq \ker f^*$... (1)

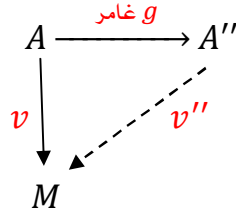
ومن جهة أخرى : أيا كان $v \in \ker f^*$ فإن :

$$f^*(v) = 0 \Rightarrow vof = 0 \Rightarrow Imf \subseteq \ker v$$

$$\text{(I) تامة}$$

$$Imf = \ker g \Rightarrow \ker g \subseteq \ker v$$

وبالتالي بما أن التشاكل g غامر حسب المبرهنة (2 - 6) فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد :



$$v''og = v \text{ من أجله } v'' : A'' \longrightarrow M$$

$$g^*(v'') = v \text{ وبالتالي}$$

$$v \in Img^* \text{ وبالتالي}$$

وعليه فيكون $kerf^* \subseteq Img^*$... (2)

ومن الاحتوائين (1) , (2) يكون $kerf^* = Img^*$

ومنه يكون المتتالية 2- تامة وهو المطلوب

∴ انتهت المحاضرة الثامنة ∴