التشاكلات المتخلصة :

تعريف : ليكن $f: A \longrightarrow B$ تشاكل مودولي , M مودول على الحلقة R وليكن المخطط :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, "fov"] & \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

فنجد أنه يمكن تعريف تشاكل :

$$f_*: Hom(M, A) \longrightarrow Hom(M, B)$$

$$f_*(v) = fov$$

وكذلك لنأخذ المخطط :

$$\begin{tikzcd} & M \\ A \arrow[ur, "vof"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

وبذلك يمكن تعريف تشاكل :

$$f^*: Hom(B, M) \longrightarrow Hom(A, M)$$

$$f^*(v) = vof$$

يسمى كل من f^*, f_* تشاكل مستخلص من التشاكل f .

مبرهنة : إذا كان $f, g \in Hom(A, B)$, $h, k \in Hom(B, C)$ فإن :

1) $(f+g)_* = f_* + g_*$ 2) $(f+g)^* = f^* + g^*$

3) $(hof)_* = h_* o f_*$ 4) $(hof)^* = h^* o f^*$

الإثبات : (1) :

$$f, g: A \longrightarrow B$$

$$f_*, g_*: Hom(M, A) \longrightarrow Hom(M, B)$$

$$f + g: A \longrightarrow B$$

واضح أن :

$$(f + g)_*: Hom(M, A) \longrightarrow Hom(M, B)$$

$$f_* + g_*: Hom(M, A) \longrightarrow Hom(M, B)$$

$$(f + g)_*(v) = (f + g)o(v) = (fov) + (gov) = f_*(v) + g_*(v)$$

وبالتالي (1) محققة وبنفس الطريقة نثبت صحة (2) .

إثبات (3) :

$$hof: A \longrightarrow C$$

$$(hof)_*: Hom(M, A) \longrightarrow Hom(M, C)$$

$$h_* o g_*: Hom(M, A) \longrightarrow Hom(M, C)$$

أيا كان $v \in Hom(A, M)$ فإن :

$$(hof)_*(v) = (hof)o(v) = ho(fov) = h_*(fov) = h_*(f_*)(v) = (h_* o f_*)(v)$$

وبالتالي (3) محققة وبنفس الطريقة نثبت صحة (4) .

مبرهنة : إذا كانت متتالية تامة من التشاكلات المودولية :

$$(\mathrm{I}) \ldots \quad 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

فإن : 1ـ $0 \longrightarrow Hom(M, A') \xrightarrow{f_*} Hom(M, A) \xrightarrow{g_*} Hom(M, A'')$ متتالية تامة

2ـ $0 \longrightarrow Hom(A'', M) \xrightarrow{g^*} Hom(A, M) \xrightarrow{f^*} Hom(A', M)$ متتالية تامة

الإثبات : 1ـ يكفي إثبات أن : $\begin{cases} f_* \text{ متباين} \\ Imf_* = kerg_* \end{cases}$

أيا كان $v' \in Kerf_*$ فإن : $f_*(v') = 0$

$$fov' = fo\,0 = 0 \;;\; 0 \text{ التطبيق الصفري}$$

ويما أن المتتالية (I) تامة فإن التشاكل f متباين وبالتالي f قابل للاختصار من اليسار وبالتالي $v' = 0$ ومنه يكون f_* متباين.

أو يمكن إثبات التباين كما يلي, نأخذ $v_1', v_2' \in Hom(M, A')$ بحيث:

$$f_*(v_1') = f_*(v_2') \Rightarrow fov_1' = fov_2' \Rightarrow v_1' = v_2' \ (\text{لأن } f \text{ متباين يمكن الاختزال}) \Rightarrow f_* \text{ متباين}$$

كما أنه أيا كان $v \in Imf_*$ فإنه يوجد $v' \in Hom(M, A')$ بحيث:

وبالتالي يكون $v = f_*(v') = fov'$:

$$g_*(v) = g_*(fov') = go(fov') = (gof)(v') = 0 \quad (\text{لأن } (I) \text{ تامة أي } gof = 0)$$

أي $v \in kerg_*$ وبالتالي $Imf_* \subseteq kerg_* \quad ... (1)$

ومن جهة أخرى: أيا كان $v \in kerg_*$ فإن:

$$g_*(v) = 0 \Rightarrow gov = 0 \Rightarrow Imv \subseteq \overbrace{kerg = Imf}^{\text{لأن (I) متتالية تامة}}$$

وبما أن التشاكل f متباين فحسب المبرهنة $(7-2)$ فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $v': M \longrightarrow A'$ يحقق: $fov' = v$ وبالتالي $f_*(v') = v \Leftarrow v \in Imf_*$ وبالتالي:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "v'"'] \arrow[d, "v"] \\ A' \arrow[r, "f \text{ متباين}"'] & A \end{tikzcd}$$

$kerg_* \subseteq Imf_* \quad ... (2)$, ومن الاحتوائين يكون $Imf_* = kerg_*$

وبذلك تكون 1- متتالية تامة

2- يكفي أن نثبت: $\begin{cases} g^* \text{ متباين} \\ Img^* = kerf^* \end{cases}$

أيا كان $v_1'', v_2'' \in Hom(A'', M)$ بحيث:

$$g^*(v_1'') = g^*(v_2'') \Rightarrow v_1''og = v_2''og$$

وبما أن g غامر فهو قابل للاختزال من اليمين أي: $v_1'' = v_2''$ ومنه يكون g^* متباين

من جهة أولى أيا كان $v \in Img^*$ فإنه يوجد $v'' \in Hom(A'', M)$ بحيث:

$$v = g^*(v'') = v''og$$

عندئذ يكون:

$$f^*(v) = f^*(v''og) = (v''og)of = v''o\overbrace{(gof)}^{gof=0 \text{ لأن (I) تامة}} = v''o\,0 = 0 \quad ; \quad 0 \text{ التطبيق الصفري}$$

إذن $v \in kerf^*$ وبالتالي $Img^* \subseteq kerf^* \quad ...(1)$

ومن جهة أخرى : أيا كان $v \in kerf^*$ فإن :

$$f^*(v) = 0 \Longrightarrow vof = 0 \Longrightarrow Imf \subseteq kerv$$

$$\overbrace{Imf = kerg}^{(\text{I})\ \text{تامة}} \Longrightarrow kerg \subseteq kerv$$

وبالتالي بما أن التشاكل g غامر حسب المبرهنة $(6-2)$ فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد :

$v'': A'' \longrightarrow M$ من أجله $v''og = v$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g\ \text{غامر}"] \arrow[d, "v"'] & A'' \arrow[dl, dashed, "v''"] \\ M & \end{tikzcd}$$

وبالتالي $g^*(v'') = v$

وبالتالي $v \in Img^*$

وعليه فيكون $kerf^* \subseteq Img^* \ ...(2)$

ومن الاحتوائين (1) , (2) يكون $kerf^* = Img^*$

ومنه يكون المتتالية 2ـ تامة وهو المطلوب

::: انتهت المحاضرة الثامنة :::