

تمرين 2 صفحة 74: ليكن $f: A \longrightarrow B$ ، $f': A' \longrightarrow B'$ تشاكلين مودولين ، ولنعرف التطبيق :

$$f \times f': A \times A' \longrightarrow B \times B'$$

$$(f \times f')(a, a') = \underbrace{f(a) \times f'(a')}_{(f(a), f'(a'))} ; \quad \forall (a, a') \in A \times A'$$

١- أثبت أن $f \times f'$ تشاكل مودولي .

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \quad \text{إذا كانت}$$

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \longrightarrow 0$$

متتاليتين تامتين فأثبت أن :

$$0 \longrightarrow A \times A' \xrightarrow{f \times f'} B \times B' \xrightarrow{g \times g'} C \times C' \longrightarrow 0$$

متتالية تامة .

الحل : ١- أي كان $(a_1, a'_1), (a_2, a'_2)$ عنصرين من $A \times A'$ و $\beta \in R$

$$(f \times f')((a_1, a'_1) + (a_2, a'_2)) = (f \times f')(a_1 + a_2, a'_1 + a'_2)$$

$$= (f(a_1 + a_2), f'(a'_1, a'_2)) = (f(a_1) + f(a_2), (f'(a'_1) + f'(a'_2)))$$

$$= (f(a_1), f'(a'_1)) + (f(a_2) + f'(a'_2)) = f \times f'(a_1, a'_1) + f \times f'(a_2, a'_2)$$

$$f \times f'(\beta(a, a')) = f \times f'(\beta a, \beta a') ; \quad (a, a') \in A \times A' \quad \text{كما أن}$$

$$= (f(\beta a), f'(\beta a')) = (\beta f(a), \beta f'(a')) = \beta(f(a), f'(a')) = \beta[f \times f'(a, a')]$$

$$\text{٢- يجب إثبات أ- } f \times f' \text{ متباين ، ب- } g \times g' \text{ غامر ، ج- } \text{Im } f \times f' = \text{ker } g \times g'$$

أ- أي كان $(a, a') \in \text{ker } f \times f'$ فإن :

$$f \times f'(a, a') = (0, 0)$$

$$(f(a), f'(a')) = (0, 0) \Rightarrow f(a) = 0 \wedge f'(a') = 0 \Rightarrow \overbrace{a = 0 \wedge a' = 0}^{f, f' \text{ كل منهما متباين}}$$

المباخرية (١٠)

إذن : $ker f \times f' = \{(0,0)\}$ أي متباين $f \times f'$

ب- أيا كان $(c, c') \in C \times C'$ فإن : $c \in C$, $c' \in C'$

وبما أن g, g' غامرين فرضا لأن المتتاليتين من الفرض تامتين وبالتالي يوجد $b \in B, b' \in B'$ بحيث

$$g(b) = c \quad , \quad g(b') = c'$$

أي يوجد $(b, b') \in B \times B'$ بحيث :

$$(g(b), g'(b')) = (c, c')$$

أي $(g(b), g'(b')) = (c, c')$ إذا $g \times g'$ غامر .

ج- أيا كان $(b, b') \in Im f \times f'$ فإنه يوجد $(a, a') \in A \times A'$ بحيث :

$$(b, b') = (f(a), f'(a'))$$

$$\underbrace{f(a) = b}_{\in Im f = ker g} \quad \wedge \quad \underbrace{f'(a') = b'}_{\in Im f' = ker g'}$$

وينتج من ذلك أن $b \in ker g \quad \wedge \quad b' \in ker g'$

ومنه $(b, b') \in g \times g'$ أي أن $Im f \times f' \in ker g \times g'$

ومن جهة أخرى : أيا كان $(b, b') \in ker g \times g'$ فإن :

$$b \in \underbrace{ker g}_{=Im f} \quad \wedge \quad b' \in \underbrace{ker g'}_{=Im f'}$$

ومنه $b = f(a) ; a \in A \quad \wedge \quad b' = f'(a') ; a' \in A'$

وبالتالي $(b, b') = (f(a), f'(a')) ; (a, a') \in A \times A'$

$$= f \times f'(a, a') \in Im f \times f' \Rightarrow ker g \times g' \in Im f \times f'$$

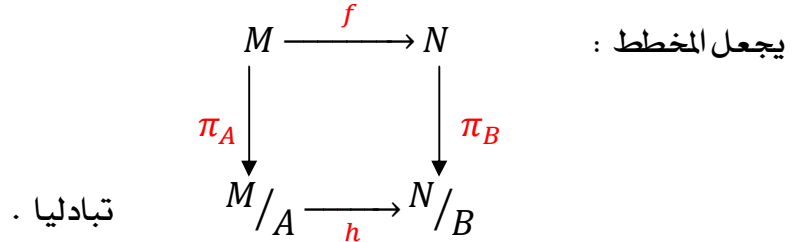
وبالتالي من الاحتوائين يكون $ker g \times g' = Im f \times f'$ ومما سبق تكون المتتالية تامة .

تمرين 2 صفحة 87 :

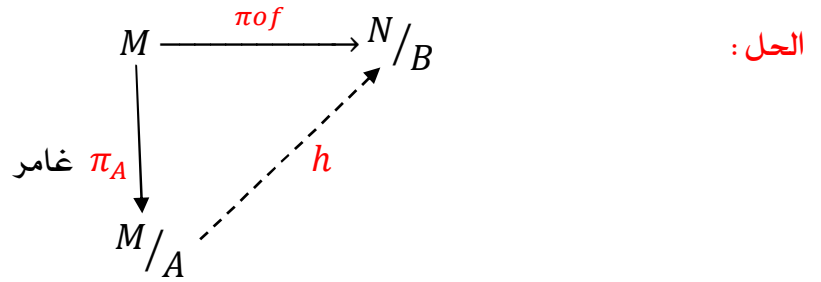
ليكن $f: M \longrightarrow N$ تشاكل مودولي ، A, B مودولين جزئيين من M, N على الترتيب :
 ١- أثبت أن القضييتين التاليتين متكافئتين :

$$\vec{f}(A) \subseteq B \quad -a$$

$$h: M/A \longrightarrow N/B \text{ يوجد تشاكل مودولي وحيد} \quad -b$$



وأكثر من ذلك $A = \vec{f}(B) \Leftrightarrow h$ متباين ، h غامر $\Leftrightarrow Im f + B = N$



$$ker \pi_A \subseteq ker (\pi_B \circ f) \Leftrightarrow b$$

$$\forall x \in ker \pi_A \Leftrightarrow x \in A$$

$$x \in ker (\pi_B \circ f) \Leftrightarrow (\pi_B \circ f)(x) = B$$

$$\Leftrightarrow \pi_B(f(x)) = B$$

$$\Leftrightarrow f(x) + B = B$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in B$$

إذا $ker \pi_A \subseteq ker (\pi_B \circ f)$ يكافئ $\vec{f}(A) = B$.

المباخرقة (١٠)

$$h: M/A \longrightarrow N/B$$

$$h(x + A) = f(x) + B$$

$$\begin{aligned} \ker h &= \left\{ x + A \in M/A ; h(x + A) = B \right\} = \tilde{f}(B) \\ &= \left\{ x + A \in M/A ; f(x) + B \right\} \end{aligned}$$

وبالتالي :

$$\ker h = A \Leftrightarrow h \text{ متباين}$$

$$\text{Im } h = \{ f(x) + B ; x \in M \}$$

$$\text{Im } h = N/B \Leftrightarrow h \text{ غامر}$$

$$\text{Im } f + B = N \Leftrightarrow$$

... انتهت المحاضرة ...