تمرين 2 صفحة 74: ليكن $f: A \longrightarrow B$ ، $f': A' \longrightarrow B'$ تشاكلين مودوليين ، ولنعرف التطبيق :

$$f \times f': A \times A' \longrightarrow B \times B'$$

$$(f \times f')(a, a') = \underbrace{f(a) \times f'(a')}_{(f(a), f'(a'))} \quad ; \quad \forall\, (a, a') \in A \times A'$$

١ـ أثبت أن $f \times f'$ تشاكل مودولي .

٢ـ إذا كانت $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \longrightarrow 0$$

متتاليتين تامتين فأثبت أن :

$$0 \longrightarrow A \times A' \xrightarrow{f \times f'} B \times B' \xrightarrow{g \times g'} C \times C' \longrightarrow 0$$

متتالية تامة .

الحل : ١ـ أيا كان $(a_1, a_1')$ , $(a_2, a_2')$ عنصرين من $A \times A'$ و $\beta \in R$

$$(f \times f')\big((a_1, a_1') + (a_2, a_2')\big) = (f \times f')(a_1 + a_2, a_1' + a_2')$$

$$= \big(f(a_1 + a_2), f'(a_1', a_2')\big) = \big(f(a_1) + f(a_2)\big), \big(f'(a_1') + f'(a_2')\big)$$

$$= \big(f(a_1), f'(a_1')\big) + \big(f(a_2) + f'(a_2')\big) = f \times f'(a_1, a_1') + f \times f'(a_2, a_2')$$

كما أن $(a, a') \in A \times A'$ ; $f \times f'\big(\beta(a, a')\big) = f \times f'(\beta a, \beta a')$

$$= \big(f(\beta a), f'(\beta a')\big) = \big(\beta f(a), \beta f'(a')\big) = \beta\big(f(a), f'(a')\big) = \beta[f \times f'(a, a')]$$

٢ـ يجب إثبات أـ $f \times f'$ متباين ، بـ ـ $g \times g'$ غامر ، جـ ـ $Im\, f \times f' = ker\, g \times g'$

أـ أيا كان $(a, a') \in ker\, f \times f'$ فإن :

$$f \times f'(a, a') = (0,0)$$

$$\big(f(a), f'(a')\big) = (0,0) \Rightarrow f(a) = 0 \;\wedge\; f'(a') = 0 \Rightarrow \overbrace{a = 0 \;\wedge\; a' = 0}^{f,\, f' \text{ كل منهما متباين}}$$

إذن: $ker\, f \times f' = \{(0,0)\}$ أي $f \times f'$ متباين

ب ـ أيا كان $(c,c') \in C \times C'$ فإن: $c' \in C'$ , $c \in C$

وبما أن $g', g$ غامرين فرضا لأن المتتاليتين من الفرض تامتين وبالتالي يوجد $b \in B, b' \in B'$ بحيث

$$g(b) = c \quad , \quad g(b') = c'$$

أي يوجد $(b,b') \in B \times B'$ بحيث:

$$\big(g(b), g'(b')\big) = (c,c')$$

أي $g \times g'(b,b') = (c,c')$ إذا $g \times g'$ غامر.

جـ ـ أيا كان $(b,b') \in Im\, f \times f'$ فإنه يوجد $(a,a') \in A \times A'$ بحيث:

$$(b,b') = \big(f(a), f'(a')\big)$$

وبالتالي $\underbrace{f'(a') = b'}_{\in Im\, f' = ker g'} \quad \wedge \quad \underbrace{f(a) = b}_{\in Im\, f = ker g}$

وينتج من ذلك أن $b' \in ker g' \quad \wedge \quad b \in ker g$

ومنه $(b,b') \in g \times g'$ أي أن $Im\, f \times f' \in ker\, g \times g'$

ومن جهة أخرى: أيا كان $(b,b') \in ker\, g \times g'$ فإن:

$$b \in \underbrace{ker\, g}_{=Im\, f} \quad \wedge \quad b' \in \underbrace{ker\, g'}_{=Im\, f'}$$

ومنه $a' \in A'$ ; $b' = f(a') \quad \wedge \quad a \in A$ ; $b = f(a)$

وبالتالي $(a,a') \in A \times A'$ ; $(b,b') = \big(f(a), f'(a')\big)$

$$= f \times f'(a,a') \in Imf \times f' \Rightarrow ker\, g \times g' \in Im\, f \times f'$$

وبالتالي من الاحتوائين يكون $ker\, g \times g' = Im\, f \times f'$ ومما سبق تكون المتتالية تامة.

تمرين 2 صفحة 87 :

ليكن $f : M \longrightarrow N$ تشاكل مودولي ، $A, B$ مودوليين جزئيين من $M, N$ على الترتيب :

١ـ أثبت أن القضيتين التاليتين متكافئتين :

$a$ ـ $\vec{f}(A) \subseteq B$

$b$ ـ يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: {}^{M}/_{A} \longrightarrow {}^{N}/_{B}$

يجعل المخطط :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_A"'] & N \arrow[d, "\pi_B"] \\ {}^{M}/_{A} \arrow[r, "h"'] & {}^{N}/_{B} \end{tikzcd}$$

تبادليا .

وأكثر من ذلك $A = \overleftarrow{f}(B) \Leftrightarrow h$ متباين ، $h$ غامر $\Leftrightarrow Im\, f + B = N$

الحل :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\pi o f"] \arrow[d, "\pi_A\ \text{غامر}"'] & & {}^{N}/_{B} \\ {}^{M}/_{A} \arrow[urr, dashed, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

$$ker\, \pi_A \subseteq ker\,(\pi_B o f) \Leftrightarrow b$$

$$\forall\, x \in ker\, \pi_A \Leftrightarrow x \in A$$

$$x \in ker(\pi_B o f) \Leftrightarrow (\pi_B 0 f)(x) = B$$

$$\Leftrightarrow \pi_B\big(f(x)\big) = B$$

$$\Leftrightarrow f(x) + B = B$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in B$$

إذا $ker\, \pi_A \subseteq ker\,(\pi_B o f)$ يكافئ $\vec{f}(A) = B$ .

$$h: {}^{M}\!/_{A} \longrightarrow {}^{N}\!/_{B}$$

$$h(x+A) = f(x) + B$$

$$ker\, h = \left\{ x + A \in {}^{M}\!/_{A} \quad ; \quad h(x+A) = B \right\} = \overleftarrow{f}(B)$$

$$= \left\{ x + A \in {}^{M}\!/_{A} \quad ; \quad f(x) + B \right\}$$

وبالتالي :

$ker\, h = A \quad \Leftrightarrow \quad$ متباين $h$

$$Im\, h = \{\, f(x) + B \quad ; \quad x \in M \,\}$$

$Im\, h = {}^{N}\!/_{B} \quad \Leftrightarrow \quad$ غامر $h$

$$Im\, f + B = N \quad \Leftrightarrow$$

... انتهت المحاضرة ...