**المحاضرة الخامسة**

2013-10-27

## طريقة سمبلكس لحل البرامج الخطية بوجود متحولات اصطناعية.

الخطوة الثالثة في طريقة سمبلكس من المحاضرة السابقة تفترض إضافة متحولات اصطناعية للشروط من الشكل $g(x) \geq b$ او من الشكل $g(x) = b$ من اجل الحصول على حل ابتدائي وسنستعرض الطريقة بالمثالي التالي.

***Exa*:** أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي باستخدام طريقة سمبلكس

$$Min\ f = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$\text{S.T}\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 30$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 60$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

***الحل*:** نلاحظ ان الشرطان الثاني والثالث من الشكل $g(x) \geq b$ و $g(x) = b$ أي اننا بحاجة متحولات اصطناعية ، بداية سنحول البرنامج للشكل القياسي ونكتب الجدول .

$$Min\ f = 2x_1 - 2x - 3x_2 - 4x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 30$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 - s_2 = 60$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 20$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$$

ويكون الجدول بالشكل.

| المتحولات الاساسية | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | الطرف الثاني |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | **30** |
| | 2 | 1 | 3 | 0 | -1 | **60** |
| | 1 | -1 | 2 | 0 | 0 | **20** |
| دالة الهدف | -2 | 3 | 4 | 0 | 0 | |

في الجدول السابق لا يوجد حل ابتدائي بالتالي لا يمكن البدء بخطوات حل البرنامج من هنا تأتي ضرورة اضافة متحولات اصطناعية للشرطين الثاني والثالث ليتشكل حل ابتدائي لذلك تصبح الشروط كالتالي.

$$Min\ f = 2x_1 - 2x - 3x_2 - 4x_3 + a_1M + a_2M$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 30$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 - s_2 + a_2 = 60$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + a_3 = 20$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, a_2, a_3 \geq 0$$

بالتالي يكون جدول سمبلكس كالتالي.

***Note*:**
نلاحظ انه أضفنا كل من $a_1, a_2$ لدالة الهدف بعد ضربها بعدد كبير $M$.

| المتحولات الاساسية | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $a_2$ | $a_3$ | الطرف الثاني |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | **30** |
| $a_2$ | 2 | 1 | 3 | 0 | -1 | 1 | 0 | **60** |
| $a_3$ | 1 | -1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | **20** |
| دالة الهدف | -2 | 3 | 4 | 0 | 0 | $-M$ | $-M$ | |

نلاحظ ان المتحولات الاساسية هي على الترتيب $s_1$ , $a_2$ , $a_3$ لكن الى الأن لايمكن اعتباره حل(جدول) ابتدائي لأنه يجب ان تكون أمثال المتحولات الإصطناعية في دالة الهدف أصفار لذلك نقوم بما يلي.
نضرب كل من الشرط الثاني والثالث بـ $-M$ ونجمعه لدالة الهدف لتصبح دالة الهدف على الشكل.

$$Min\ f = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + Ma_2 + Ma_3 - M(2x_1 + x_2 + 3x_3 - s_2 + a_2 - 60) - M(x_1 - x_2 + 2x_3 + a_3 - 20)$$
$$Min\ f = -(3M - 2)x_1 - 3x_2 - (5M + 4)x_3 + Ms_2 + 80M$$

بالتالي الجدول الابتدائي يكون بالشكل

| المتحولات الاساسية | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $a_2$ | $a_3$ | الطرف الثاني |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | **30** |
| $a_2$ | 2 | 1 | 3 | 0 | -1 | 1 | 0 | **60** |
| $a_3$ | 1 | -1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | **20** |
| دالة الهدف | $3M - 2$ | 3 | $5M + 4$ | 0 | $-M$ | 0 | 0 | **$80M$** |

وهذا جدول السمبلكس الابتدائي الان نقوم بإيجاد عمود الدوران الممثل بأكبر قيمة في سطر دالة الهدف وهو العمود الثالث لأن $M$كبيرة جدا ونوجد سطر الدوران بتقسم الطرف الثاني على مقابلاتها من عمود الدوران ونأخذ أصغر قيمة وهي المقابلة للسطر الثالث وعنصر الدوران يكون المظلل بالأصفر .نجري التحويلات السطرية التالية لجعل عمود الدوران اصفار عدا عنصر الدوران نجعله واحد .

$$R_3' \to \frac{1}{2}R_3$$
$$R_1' \to -R_3' + R_1$$
$$R_2' \to -3R_1' + R_2$$
$$R_4' \to -(5M + 4)R_3' + R_4$$

ويكون جدول السمبلكس

| المتحولات الاساسية | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $a_2$ | $a_3$ | الطرف الثاني |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 1/2 | 3/2 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1/2 | **20** |
| $a_2$ | 1/2 | 5/2 | 0 | 0 | -1 | 1 | -3/2 | **30** |
| $x_3$ | 1/2 | -1/2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1/2 | **10** |
| دالة الهدف | $0.5M - 4$ | $2.5M + 5$ | 0 | 0 | $-M$ | 0 | $-(2.5M - 2)$ | **$3M - 40$** |

وتصبح المتحولات الأساسية هي $s_1$ , $a_2$ , $x_3$ ونحذف عمود المتحول الاصطناعي $a_3$ لأنه لم يعد اساسي .

نعيد الخطوات ونوجد عمود وسطر الدوران ونجد ان عمود الدوران هو الثاني وطر الدوران السطر الثاني ايضا وعنصر الدوران العنصر المبين باللون الأصفر نجري التحويلات السطرية التالية

***Note:***
ان حساب عمود $a_3$يزيد من كلفة خوارزمية الحل لذلك يمكن اهمال حساب هذا العمود لنه سوف يحذف بعد اجراء هذه التحويلات السطرية ،لكن تم حسابه للتوضيح فقط

$R_2' \to 2/5R_2$
$R_1' \to -2/3R_2' + R_1$
$R_3' \to \frac{1}{2}R_2 + R_3$
$R_4' \to -(2.5M + 5)R_3' + R_4$

| المتحولات الاساسية | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $a_2$ | الطرف الثاني |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 1/5 | 0 | 0 | 1 | 3/5 | -3/5 | **2** |
| $x_2$ | 1/5 | 1 | 0 | 0 | -2/5 | 2/5 | **12** |
| $x_3$ | 3/5 | 0 | 1 | 0 | -1/5 | 1/5 | **16** |
| دالة الهدف | $-5$ | 0 | 0 | 0 | 2 | $-M-2$ | **$-100$`** |

وتصبح المتحولات الاساسية هي $s_1, x_2, x_3$ ونحذف عمود المتحوا الاصطناعي $a_2$ لأنه لم يعد متحولا اساسي.

إن الجدول السابق ليس جدول نهائي لأنه يوجد عدد موجب في سطر دالة الهدف لذلك نعيد الخطوات في ايجاد عنصر الدوران المبين في اللون الاصفر .ونجري التحويلات التالية.

$R_1' \to 5/3R_1$
$R_2' \to R_2 + 2/5R_1'$
$R_3' \to R_3 + 1/5R_1'$
$R_4' \to R_4 - 2R_2'$

والجدول النهائي للسمبلكس يكون .

| المتحولات الاساسية | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | الطرف الثاني |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_2$ | 1/3 | 0 | 0 | 5/3 | 1 | **3.3** |
| $x_2$ | 7/15 | 1 | 0 | 2/3 | 0 | **13.3** |
| $x_3$ | 10/15 | 0 | 1 | 1/3 | 0 | **16.7** |
| دالة الهدف | $-20/3$ | 0 | 0 | -10/3 | 0 | **$-106.7$** |

والحل الأمثل الموافق يكون

$x_3 = 16.7 \quad x_2 = 13.3 \quad s_2 = 3.3$ وقيمة دالة الهدف تكون $-106.7$

---

***H.W***:حل البرنامج التالي

$Max\ f = 100x_1 + 8 - x_2$
$x_1 + x_2 \geq 1$
$2x_1 + 3x_2 \leq 36$
$x_1, x_2 \geq 0$

وذلك بطريقتين بيانيا وبطريقة سمبلكس.

***Remember***:
وجود عدد سالب في الطرف الثاني يعد خطأ كبير اذ ان جميع قيم الطرف الثاني يجب ان تبقى موجبة .

## أنواع البرامج حسب الحلول:

1. مسألة غير محدودة(منطقة الحلول غير محدودة والحل في اللانهاية)ويستدل عليها في طريقة السمبلكس بالشكل .جميع عناصر عمود الدوران سالبة ولا نستطيع تحديد سطر الدوران مثلا

| المتحولات الاساسية | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | الطرف الثاني |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 3 | 1 | 0 | -1 | **8** |
| $s_1$ | 2 | 0 | 1 | -1 | **3** |
| دالة الهدف | -3 | 0 | 0 | 4 | |

نلاحظ ان عمود الدوران هو المقابل للرقم 4 في سطر دالة الهدف وجميع عناصر العمود سالبة لذلك لا يمكن تحديد سطر الدوران فنقول ان المسالة غير محدودة والحل في اللانهاية.

2. مسألة مستحيلة الحل

اذا كان الجدول النهائي لا يزال يحوي متحولات اصطناعية(أي يوجد متحول اصطناعي اساسي)

| المتحولات الاساسية | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $a_2$ | الطرف الثاني |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 1 | 2 | 5 | 0 | **2** |
| $a_1$ | 0 | 1 | 1 | 1 | **2** |
| دالة الهدف | 0 | -2 | -4 | 0 | |

نلاحظ ان جميع عناصر سطر دالة الهدف سالبة اما اصفار ولازال يوجد متحول اصطناعي

3. للمسألة عدد غير منتهي من الحلول.

يستدل عليها اذا وجد متحول غير اساسي في الجودل النهائي وقيمة دالة الهدف المقابلة له تساوي الصفر مثلا.

| المتحولات الاساسية | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | الطرف الثاني |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 1 | 1 | 0 | 2 | **2** |
| $s_1$ | -2 | 0 | 1 | -3 | **2** |
| دالة الهدف | 0 | 0 | 0 | 2- | **8** |

في الجدول $x_1$ ليس متحول اساسي وقيمة دالة الهدف عنده صفر.بفرض دالة الهدف 8 في حال تابعنا الحل وأوجدنا عنصر الدوران سينتج حل أخر لكن قيمة دالة الهدف لن تتغير.

*This is the end …….hold your breath and count to ten*

نهاية المحاضرة الخامسة.

www.syriamath.net