الفصل الخامس: قاعدة وبعد فضاء شعاعي

5.1: الارتباط والاستقلال الخطي:

تعريف: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل F ولتكن $S=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة جزئية في V عندئذ:

①. نقول ان عناصر V مستقلة خطياً اذا تحقق: $\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_n v_n=\vec{0}$

فإن: $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$

②. نقول إن S مرتبطة خطياً اذا وجد عناصر $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$

وليست جميعها أصفار بحيث: $\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_n v_n=0$

مثال: ليكن V فضاء شعاعي معرف على الحقل $\mathbb{R}^3$ ولتكن:

$S=\{v_1=(0,1,1), v_2=(1,0,1), v_3=(1,1,0)\}$ بين فيما ان كانت مرتبطة أو مستقلة خطياً.

$(0,0,0)=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3$

$=\lambda_1(0,1,1)+\lambda_2(1,0,1)+\lambda_3(1,1,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0=\lambda_2+\lambda_3 \\ 0=\lambda_1+\lambda_3 \\ 0=\lambda_1+\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

ومنه S مستقلة خطياً

ملاحظة: ①: اذا كانت $S=\{v\}$: $v\neq 0 \Leftarrow S$ مستقلة خطياً

لأن $\lambda . v=0 \Rightarrow \lambda=0$

$v\neq 0$

②: اذا كانت $S=\{0\} \Leftarrow S$ مرتبطة خطياً: $\forall 0\neq\lambda\in F: \lambda 0=0$

③. $S=\{0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ مرتبطة خطياً لأن:

$\exists 0\neq\lambda\in F ; 0=\lambda 0+0v_1+0v_2+0v_3+0v_4$

④: $S=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مرتبطة خطياً اذا كان أحد عناصرها يكتب كتركيب خطي بدلالة بقية العناصر

⑤: ان المجموعة S مستقلة خطياً اذا كان مجموع مركبات عناصرها لا يساوي الصفر.

مثال: لتكن V فضاء شعاعي معرف على الحقل $\mathbb{R}^3$ ولتكن $S=\{v_1=(0,1,1), v_2=(1,0,1), v_3=(1,1,0)\}$ بين فيما ان كانت S مستقلة خطياً.

$$S=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 0+1+1 = 2 \neq 0$ وبالتالي S مستقلة خطياً.

مثال: لتكن V فضاء شعاعي معرف على الحقل $\mathbb{R}^3$ ولتكن $S=\{v_1=(0,1,1), v_2=(1,0,1), v_3=(1,1,2)\}$ بين نوع S.

يمكن حل هذا المثال بطريقة المحدد أو نلاحظ أن $v_3=v_1+v_2$

2.5 قاعدة وبعد فضاء شعاعي:

تعريف: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل F ولتكن $S=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ مجموعة جزئية في فضاء V نقول إن S قاعدة للفضاء V اذا وفقط اذا تحقق:

1) $V=\mathrm{Span}(S) \leftarrow$ «V مولدة بعناصر S»

2) S مستقلة خطياً.

مثال: $V=\mathbb{R}^n$ ولتكن $S=\{e_1=(1,0,\dots,0), e_2=(0,1,\dots,0), \dots, e_n=(0,0,\dots,1)\}$

1) S مولدة للفضاء V

$\forall v=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in V$

$v=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\dots+\lambda_ne_n$

$=\lambda_1(1,0,\dots,0)+\lambda_2(0,1,\dots,0)+\dots+\lambda_n(0,0,\dots,1)$

$=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n) \Rightarrow x_1=\lambda_1, x_2=\lambda_2, \dots, x_n=\lambda_n$

$\Rightarrow \exists\, \lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R} : v=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\dots+\lambda_nv_n$

S مستقلة خطياً

$0=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\dots+\lambda_ne_n$

$(0,0,\dots,0)=\lambda_1(1,0,\dots,0)+\lambda_2(0,1,\dots,0)+\dots+\lambda_n(0,0,\dots,1)$

$(0,0,\dots,0)=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$

نسمي هذه القاعدة بالقاعدة القانونية لـ V.

$n=2 \Longleftarrow V=\mathbb{R}^2$; $E=\{e_1=(1,0), e_2=(0,1)\}$ القاعدة القانونية في $\mathbb{R}^2$

$n=3 \Longleftarrow V=\mathbb{R}^3$; $E=\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$ القاعدة القانونية في $\mathbb{R}^3$

مثال: $V=\mathbb{R}^3$ ، $S=\{v_1=(0,1,1), v_2=(1,0,1), v_3=(1,1,0)\}$

أثبت أن S قاعدة.

الحل:

$$(0,0,0)=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3$$

$$(0,0,0)=\lambda_1(0,1,1)+\lambda_2(1,0,1)+\lambda_3(1,1,0)$$

$$\begin{cases} 0=\lambda_2+\lambda_3 \\ 0=\lambda_1+\lambda_3 \\ 0=\lambda_1+\lambda_2 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

وبالتالي فإن S مستقلة خطياً

$$\forall v=(x,y,z)\in V,\ v=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3$$

$$(x,y,z)=(\lambda_2+\lambda_3,\ \lambda_1+\lambda_3,\ \lambda_1+\lambda_2) \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x=\lambda_2+\lambda_3 \\ y=\lambda_1+\lambda_3 \\ z=\lambda_1+\lambda_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} \lambda_2=x-\lambda_3 \\ \lambda_1=y-\lambda_3 \\ z=x-\lambda_3+y-\lambda_3=x+y-2\lambda_3 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \lambda_3=\tfrac{1}{2}(x+y-z)$$

$$\Longrightarrow \lambda_2=x-\tfrac{1}{2}(x+y-z)=\tfrac{1}{2}(x-y+z)\in\mathbb{R}$$

$$\lambda_1=y-\tfrac{1}{2}(x+y-z)=\tfrac{1}{2}(y+z-x)\in\mathbb{R}$$

ومنه $\exists \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R};\ v=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3$

وبالتالي $V=Span(S)$

$\boxed{2-5}$ **مبرهنة:** ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل F، لتكن $S=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ مجموعة جزئية في V. S قاعدة للفضاء V إذا وفقط إذا كان كل عنصر من V يكتب كتركيب خطي بشكل وحيد بدلالة عناصر S.

البرهان: $\Longleftarrow$ نفرض أن S قاعدة للفضاء V.

$$\forall v\in V,\ \exists \lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in F;$$

$$v=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_n v_n$$

وهذا لأن S تولد الفضاء V.

/ /

نفرض: V يكتب بطريقتين كتركيب خطي بدلالة عناصر S أي

$\exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in F$

بالطرح:
$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$
$$v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n \Rightarrow$$
$$0 = (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + (\lambda_2 - \mu_2) v_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n) v_n$$
$$\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = \cdots = \lambda_n - \mu_n = 0$$
$$\Longrightarrow \lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \ldots, \lambda_n = \mu_n$$

$\Longleftarrow$ نفرض: كل شعاع $v \in V$ يكتب كتركيب خطي بشكل وحيد بدلالة عناصر S.

(1) إذا $V = Span(S)$ من الفرض

(2) $0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$

$0 = 0 v_1 + 0 v_2 + \cdots + 0 v_n$

$0 \in V$ وبما أن $0 \in V$ يكتب بشكل وحيد كتركيب خطي بدلالة عناصر S ويكون $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ ومنه S مستقلة خطياً وبالتالي S قاعدة للفضاء V.

مثال: $V = \mathbb{R}^2$ $S = \{v_1 = (1,0), v_2 = (-1,1), v_3 = (1,1)\}$

بين فيما إذا كانت S قاعدة للفضاء V.

الحل. S ليست قاعدة لأن
$$v_3 = 2v_1 + v_2$$
$$v_3 = 0 v_1 + 0 v_2 + v_3$$

وحسب المبرهنة السابقة تكون S ليست قاعدة.

تعريف: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل F ولتكن $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ قاعدة للفضاء V نعرف احداثيات الشعاع $v \in V$ بأنها عناصر $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$ التي تحقق
$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

مثال: إذا كان $V = \mathbb{R}^2$ $E = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ القاعدة القانونية $S = \{(1,0), (1,1)\}$ قاعدة ثانية

أوجد احداثيات الشعاع $v(3,2)$ بالنسبة للقاعدتين السابقتين

/ /

الحل: بالنسبة لـ E: $v=(3,2)=3e_1+2e_2$

فتكون احداثيات v بالنسبة لـ E هي $\lambda_1=3, \lambda_2=2$

بالنسبة لـ S: $v=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2$

$$(3,2)=\lambda_1(1,0)+\lambda_2(1,1)=(\lambda_1+\lambda_2, \lambda_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=3\\ \lambda_2=2\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l}\lambda_1=1\\ \lambda_2=2\end{array}$$

$$v=v_1+2v_2$$

ملاحظة:

١- اذا كانت عدد عناصر مجموعة أكبر من عدد عناصر القاعدة فإن المجموعة مرتبطة خطياً.

٢- اذا كانت S قاعدة للفضاء شعاعي فإن عدد عناصرها يساوي عدد عناصر أي قاعدة أخرى للفضاء V (كل القواعد لها نفس عدد العناصر).

$\boxed{4.2.5}$ تعريف: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل K ولتكن $S=\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ نعرف بعد الفضاء V بأنه يساوي عدد عناصر القاعدة S ونرمز له بالرمز $\dim(V)$

ملاحظة:

١) اذا كان بعد الفضاء غير منتهي فإننا نقول عن الفضاء بأنه فضاء غير منتهي البعد.

تعريف: أوجد بعد الفضاء الصفري. $V=\{0\}$

مثال: $V=\mathbb{R}^3$ $\quad \dim V=3$

$V=\mathbb{R}^n$ $\quad \dim V=n$

مثال: $V=\mathbb{R}^3$ و $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-y+z=0\}$

فضاء شعاعي جزئي في V أوجد قاعدة وبعد W

الحل: $W=\{(x, x+z, z) : x,z\in\mathbb{R}\}$

$$W=\{(x,x,0),(0,z,z) : x,z\in\mathbb{R}\}$$

$$=\{x(1,1,0), z(0,1,1) : x,z\in\mathbb{R}\}$$

$$=\operatorname{Span}(S) \ ; \ S=\{(1,1,0),(0,1,1)\}$$

/ /

S مستقلة خطياً لأن $0 = \lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(0,1,1)$

$(0,0,0) = (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

وبالتالي S قاعدة للفضاء W و $\dim W = 2$

$\boxed{5\text{-}2\text{-}5}$ تعريف: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل F ولتكن $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ مجموعة من الأشعة المستقلة خطياً في V. نقول إن S مجموعة عظمى من الأشعة المستقلة خطياً إذا وفقط إذا كان من أجل شعاع $v \in V$ تكون المجموعة

$$S' = S \cup \{v\} = \{v, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

وتبعية خطية.

مثال: $V = \mathbb{R}^2$ ، $S = \{v_1 = (1,0), v_2 = (1,1)\}$

تشكل مجموعة عظمى من الأشعة المستقلة خطياً لأن:

$v = (2,3) \Rightarrow S' = \{v_1, v_2, v\}$

وتبعية خطية

انتهت المحاضرة.