المحاضرة التاسعة

السرعة تحليلياً:

$$\forall M \in S : \vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = (qz - ry)\vec{i} + (rx - pz)\vec{j} + (py - xq)\vec{k}$$

على المتماسكة.

$$\vec{v}(M) = (q_1 z_1 - r_1 y_1)\vec{i_1} + (r_1 x_1 - p_1 z_1)\vec{j_1} + (p_1 y_1 - x q_1)\vec{k_1}$$

على الثابتة.

التسارع الزاوي:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k})$$

$$= p'\vec{i} + p\frac{d\vec{i}}{dt} + q'\vec{j} + q\frac{d\vec{j}}{dt} + r'\vec{k} + r\frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$= p'\vec{i} + q'\vec{j} + r'\vec{k} + p(\vec{\omega} \wedge \vec{i}) + q(\vec{\omega} \wedge \vec{j}) + r(\vec{\omega} \wedge \vec{k})$$

$$= p'\vec{i} + q'\vec{j} + r'\vec{k} + \vec{\omega} \wedge (p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k})$$

$$= p'\vec{i} + q'\vec{j} + r'\vec{k} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{\varepsilon} = p'\vec{i} + q'\vec{j} + r'\vec{k}}$$

التسارع تحليلياً:

$$\forall M \in S : \vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p' & q' & r' \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$= (q'z - yr' + q v_z - r v_y)\vec{i} + (r'x - zp' + r v_x - p v_z)\vec{j}$$
$$+ (p'y - q'x + p v_y - q v_x)\vec{k}$$

على المتماسكة

على الثابتة:

$$\vec{F}(M) = (q_1' z_1 - r_1' y_1 + q_1 v_{z_1} - r v_{y_1})\vec{i_1} +$$
$$(r_1' x_1 - z_1 p_1' + r_1 v_{x_1} - p v_{z_1})\vec{j_1} + (p_1' y_1 - q_1' x_1 + p_1 v_{y_1}$$
$$- q_1 v_{x_1})\vec{k_1}$$

يتعين المحور الآني للدوران في الفراغ الثابت أو المتماسك من شرط توازي شعاع الدوران مع المحور فإذا كانت النقطة $O_1 \in \Delta$ فإن $\vec{OO_1} \parallel \vec{\omega}$ وبالتالي:

في الجملة المتماسكة: $\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \leftarrow$

معادلتين وسيطيتين للمتدحرج

وبحذف الزمن نحصل على معادلة المتدحرج.

في الجملة الثابتة: نحصل على المعادلات: $\frac{x_1}{p_1} = \frac{y_1}{q_1} = \frac{z_1}{r_1} \leftarrow$

نحصل على معادلتين وسيطيتين للقاعدة وبحذف الزمن نحصل على معادلة القاعدة.

سؤال دورة:

صفيحة بشكل مربع $OABC$ طول ضلعه $l = 1$، تدور حول رأسها الثابت O بحيث يبقى ضلعها OA ملازماً للمستوي الثابت Ox_1y_1 ويفرض أن سرعة النقطة A قيمتها العددية مساوية للواحد والقيمة العددية لسرعة النقطة B تتعين بالعلاقة:

$$v^2(B) = 1 + \cos^2\theta$$

ملاحظة إذا لم يتم تحديد الجملة يجب الحل على الجملتين

والمطلوب:

عين مركبات شعاع الدوران الآني على جملة المحاور المتماسكة مع الصفيحة وعين معادلات حركة الصفيحة، عين سرعة النقطة M على الجملة الثابتة بفرض أن M تتحرك على الضلع OC بسرعة ثابتة قيمتها v علماً أن M كانت في لحظة البدء في النقطة O

الحل:

$v(A) = 1$ $\qquad$ $l = 1$

$v^2(B) = 1 + \cos^2\theta$ $\qquad$ $\vec{\omega} = \psi' \vec{k_1} + \theta' \vec{u} + \varphi' \vec{k}$

نختار جملة المحاور الثابتة $o_1x_1y_1z_1$ ، نختار جملة محاور متماسكة مع الجسم $oxyz$

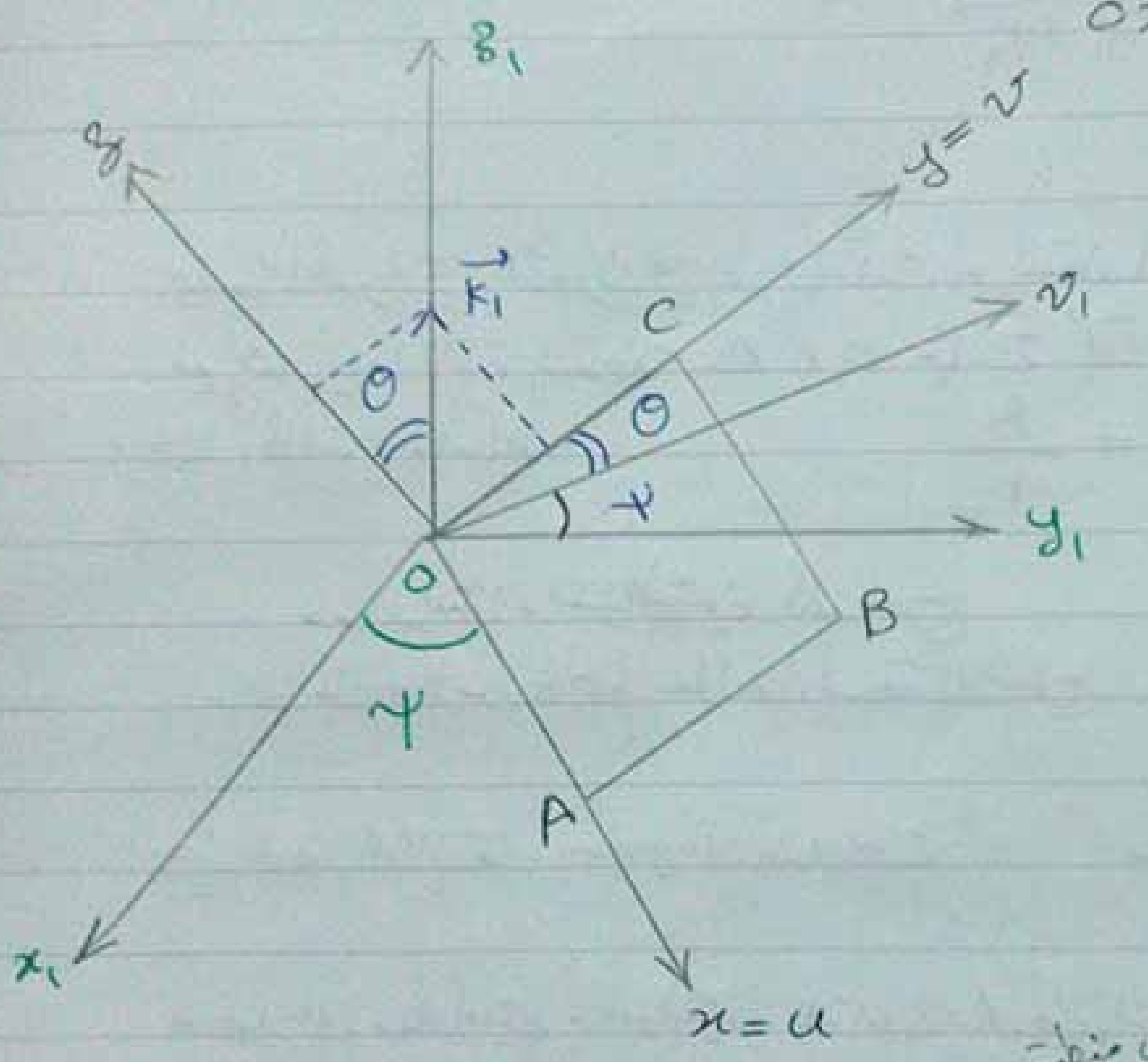
بما أن الحركة دورانية حول نقطة ثابتة أي لدينا ثلاث وسطاء مستقلة [زوايا أولر]

ولكن من نص المسألة: إن الضلع OA ملازم للمستوي ox_1y_1 وبالتالي

فإن عدد الوسطاء المستقلة تساوي إلى وسيطين فقط

ou ينطبق على ox

$\Leftarrow \varphi = 0$



u منطبق على x

$$\omega = \psi' \vec{k_1} + \theta' \vec{i} + 0$$

$$\vec{k_1} = \sin\theta \vec{j} + \cos\theta \vec{k}$$

$$\vec{\omega} = \psi' \sin\theta \vec{j} + \psi' \cos\theta \vec{k} + \theta' \vec{i}$$

$$= \theta' \vec{i} + \psi' \sin\theta \vec{j} + \psi' \cos\theta \vec{k}$$

وهو شعاع الدوران في الجملة المتماسكة.

معادلات الحركة ψ , θ

$$\vec{v}(A) = \vec{\omega} \wedge \vec{OA}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{\theta} & \dot{\psi}\sin\theta & \dot{\psi}\cos\theta \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}(A) = \dot{\psi}\cos\theta\,\vec{j} - \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{k}$$

$$|\vec{v}(A)|^2 = \dot{\psi}^2\cos^2\theta + \dot{\psi}\sin^2\theta$$

$$\rightarrow 1 = \dot{\psi}^2 \rightarrow \dot{\psi} = \mp 1$$

$\psi = t + m$ ؛ m ثابت

؛ $t = 0 , \psi = 0 \rightarrow m = 0 \rightarrow \boxed{\psi = t}$

$$\vec{v}(B) = \vec{\omega} \wedge \vec{OB}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{\theta} & \dot{\psi}\sin\theta & \dot{\psi}\cos\theta \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\dot{\psi}\cos\theta\,\vec{i} + \dot{\psi}\cos\theta\,\vec{j} + (\dot{\theta} - \dot{\psi}\sin\theta)\vec{k}$$

$$\vec{v}(B) = -\cos\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} + (\dot{\theta} - \sin\theta)\vec{k}$$

$$1 + \cos^2\theta = \cos^2\theta + \cos^2\theta + \dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta}\sin\theta + \sin^2\theta$$

$$0 = \dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\dot{\theta} = 2\sin\theta \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = 2\sin\theta$$

$$\rightarrow \frac{d\theta}{\sin\theta} = 2dt$$

← إذا وصلنا إلى

هذه المرحلة في الامتحان

تحصوا درجة الجواب النهائي دون الخطوات الباقية

ملاحظة:

$$\cos\frac{\theta}{2} = t \Rightarrow \frac{1}{2}\left(1 + tg^2\frac{\theta}{2}\right)d\theta = dt$$

$$\frac{1}{2}(1+t^2)\,d\theta = dt \Rightarrow d\theta = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

باستعمال

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

عودة إلى الحل:

$$\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}} = 2dt \Rightarrow \frac{dz}{z} = 2dt \Rightarrow \ln|z| = 2t + c$$

$$\Rightarrow z = e^{2t+d} \to \text{ثا}$$

$$tg\frac{\theta}{2} = e^{2t+d}$$

$$\to \theta = 2\,\text{arc}\,tg\, e^{2t+d}.$$

طلب إضافي: تعيين المسقط.

$$O_1(x_1, y_1, z_1) \in \Delta \quad : \overrightarrow{OO_1} \parallel \vec{\omega}$$

$$\frac{x}{\theta'} = \frac{y}{\sin\theta} = \frac{z}{\cos\theta}$$

$$\frac{x}{2\sin\theta} = \frac{y}{\sin\theta} = \frac{z}{\cos\theta}$$

$$\to x\cos\theta = 2z\sin\theta$$

$$y\cos\theta = z\sin\theta \quad \to \frac{x}{y} = 2 \Rightarrow \boxed{x = 2y}$$