كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة دمشق   السنة : الثانية
المقرر : تحليل (3)   الفصل : الأول
المحاضرة : (12)   التاريخ : 2013/11/17

مبرهنة <1> : (هــامة لأجل التمارين)

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع معرفة على مجال مثل I ..
ولنفرض أنَّ هذه المتتالية تتقارب من تابع مثل $f(x)$ على مجال I ..
عندئذٍ : تكون القضيتين التاليتين متكافئتين ..

1) - المتتالية $\{f_n(x)\}$ تتقارب بانتظام على المجال I .
2) - بفرض : $M_n = sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ من أجل كل n فإنه :
$$\left(\lim_{n \to \infty} M_n = 0 \right)$$

الإثبات : " $\Leftarrow$ "

لنفرض أن المتتالية $\{f_n(x)\}$ تتقارب بانتظام من $f(x)$ على المجال I ..
وليكن $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي موجب كيفي .. عندئذٍ : $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ ..
بما أن $\{f_n(x)\}$ تتقارب بانتظام من $f(x)$ على المجال I .. فإنه يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون :
$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ عندما $n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I ..

بما أن : $|f_n(x) - f(x)|$ محدود فإنه يوجد : $M_n = sup_{x \epsilon I} |f_n(x) - f(x)|$ حيث : $n \geq N_0$

ومنه يكون :
$$0 \leq M_n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \implies 0 \leq M_n < \varepsilon \implies M_n \to 0$$

" $\Rightarrow$ "

لنفرض أن : $M_n \to 0$ عندما $n \to \infty$ .. حيث : $M_n = sup_{x \epsilon I} |f_n(x) - f(x)|$ ومن أجل كل n
وليكن $\varepsilon > 0$ .. عندئذٍ فإن : $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ ..
وبما أن : $M_n \to 0$ فإنه يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون : $|M_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$ عندما $n \geq N_0$ .. أي أن :
$M_n < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ عندما $n \geq N_0$ .. ومنه : $sup_{x \epsilon I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ عندما $n \geq N_0$
ولكن : $|f_n(x) - f(x)| \leq sup_{x \epsilon I} |f_n(x) - f(x)|$ ومن أجل جميع قيم x من I ..

إذاً : $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ عندما $n \geq N_0$ و من أجل جميع قيم x من I

إذاً : $\{f_n(x)\}$ تتقارب بانتظام من $f(x)$ على المجال I .. و هو المطلوب .

مبرهنة <2> :

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع معرفة على مجال مثل I .. عندئذٍ :
المتتالية $\{f_n(x)\}$ تتقارب بانتظام من $f(x)$ على مجال I إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :
أياً كانت $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون : $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$
عندما $m \geq n \geq N_0$ و $\forall\, x \in I$ ..

الإثبات : " $\Leftarrow$ "

لنفرض أن $\{f_n(x)\}$ تتقارب بانتظام من تابع $f(x)$ على I وليكن $\varepsilon > 0$ عندئذٍ : $\frac{\varepsilon}{2} > 0$
بما أن : $\{f_n(x)\}$ تتقارب بانتظام من $f(x)$ على I فإنه يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون :
$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ عندما : $n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I ..

ومنه :
$$|f_m(x) - f_n(x)| = |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \leq$$
$$\leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
عندما : $m \geq n \geq N_0$ و $\forall\, x \in I$ ..

" $\Rightarrow$ " ((عندما نبدل x_0 بـ x تصبح المتتالية متتالية عددية وبالتالي تصبح كوشية))

لنفرض أنه .. أياً كان $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون : $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$
عندما $m \geq n \geq N_0$ و $\forall\, x \in I$ ..

لنثبت أولاً أن المتتالية متقاربة ..
فلنأخذ $x_0 \in I$ ونعوض في المتتالية فنحصل على المتتالية العددية $\{f_n(x_0)\}$ والتي تحقق الفرض :
أياً كان $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون : $|f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon$ عندما $m \geq n \geq N_0$
وهذا يعني أن المتتالية العددية $\{f_n(x_0)\}$ كوشية .. وبالتالي فهي متقاربة من عدد مثل α_0 ..
وبتكرار هذا العمل من أجل جميع قيم x من I نحصل على تابع سنرمز له بالرمز $f(x)$ وبذلك يكون :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

على المجال I .. ((أي أن المتتالية $f_n(x)$ تتقارب من التابع $f(x)$ على المجال I))

الآن بقي أن نثبت أنَّ هذا التقارب تقاربٌ منتظم ..
ليكن $\varepsilon > 0$ عندئذٍ : $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ .. ومنه يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون : $|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$
عندما $m \geq n \geq N_0$ و $\forall\, x \in I$ ..
لنُثبِّت n بحيث $n \geq N_0$ ولنجعل : $m \to \infty$ فيكون : $f_m(x) \to f(x)$ وبالتالي :
$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ عندما $n \geq N_0$ و $\forall\, x \in I$ .. ومنه : $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$
وبالتالي فإن المتتالية $\{f_n(x)\}$ تتقارب بانتظام من $f(x)$ على المجال I .. وهو المطلوب ..

مبرهنة <3> :

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع مستمرة على مجال مغلق مثل I .. ولنفرض أن :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

على المجال I .. ولنفرض أن التابع $f(x)$ مستمر على I .. وبفرض كون : $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$
$\forall n \in N$ و $\forall x \in I$ .. عندئذٍ : $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من $f(x)$ على المجال I ..

الإثبات : (تقبل دون إثبات)

... حل تمارين المحاضرة السابقة ...

مثال (1) :

ادرس تقارب متتالية التوابع $\left\{f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}\right\}$ على المجال $I = [0,1]$

الحل :

نحسب أولاً تابع النهاية :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0$$

ولكن :
$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{1+n^2x^2} - 0\right| = \frac{x}{1+n^2x^2} = \frac{x}{(1-nx)^2+2nx}$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2n} \cdot \underbrace{\frac{2nx}{(1-nx)^2+2nx}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{2n} \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2n} \;\;, \forall x \epsilon I$$

بحيث يكون : $sup_{x\epsilon I}\, |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2n}$

ولكن عندما يكون : $\left(x = \frac{1}{n} \;\epsilon\; I\right)$ فذلك يؤدي إلى أن :

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2n}$$

وبالتالي : $sup_{x\epsilon I}\, |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2n}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} sup_{x\epsilon I}\, |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

وبالتالي وحسب (مبرهنة <1>) يكون التقارب منتظم على المجال I ..

مثال (2) :

ادرس تقارب متتالية التوابع $\left\{f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$ على المجال $I=[0,+\infty[$

الحل :

نحسب أولاً تابع النهاية :

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases} 0 & ;\ 0\le x<1 \\ \frac{1}{2} & ;\ x=1 \\ 1 & ;\ x>1 \end{cases}$$

نلاحظ أن :

هذا التابع غير مستمر عند النقطة $x=1$ لأن :

$$\lim_{\begin{cases} n\to\infty \\ x\to 1-0\end{cases}} f_n(x)=0\neq \lim_{n\to\infty} f_n(1)=\frac{1}{2}\neq \lim_{\begin{cases} n\to\infty \\ x\to 0-1\end{cases}} f_n(x)=1$$

وبما أن حدود هذه المتتالية هي توابع مستمرة على المجال I .. وأن تابع النهاية لها غير مستمر على هذا المجال ..

إذاً .. فإن التقارب غير منتظم على المجال I .

" انتهت المحاضرة " ....