رابعاً : طريقة نيوتن الأمامية في حالة عقد متساوية :

ليكن $y = f(x)$ تابع معرف عند نقاط الارتكاز $x_0, x_1, \dots, x_n$ المرتبة تصاعدياً و المتساوية البعد فيما بينها حيث : $x_{i+1} - x_i = h \;:\; i = \{0,1,2,\dots,n-1\}$

نعرف المؤثر التفاضلي Δ كما يلي :

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i : i = \{0,1,\dots,n-1\}$$

حيث نسمي هذه الفروق بالفروق الأمامية الأولى للتابع $y = f(x)$ بنفس الطريقة نعرف الفروق الأمامية الثانية و الثالثة كما يلي :

$$\begin{aligned}
\Delta^2 y_i &= \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - y_{i+1} - (y_{i+1} - y_i) \\
&= y_{i+2} - 2y_{i+1} - y_i : i = \{0,1,\dots,n-2\} \\
\Delta^3 y_i &= \Delta(\Delta^2 y_i) = \Delta(y_{i+2} - 2y_{i+1} - y_i) \\
&= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i : i = \{0,1,\dots,n-3\} \\
&\vdots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\Delta^m y_i &= y_{i+m} - \binom{m}{1} y_{i+m-1} + \binom{m}{2} y_{i+m-2} - + \cdots + (-1)^m y_i \\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} y_{i+m-k} \quad : \quad i = \{0,1,\dots,n-m\}
\end{aligned}$$

نجري تغير بالمتحول $x = x_0 + th$ فيكون $t = \frac{x - x_0}{h}$ فتكون حدودية الاستيفاء حسب نيوتن الأمامية :

$$\boxed{\bar{P}_n(t) = y_0 + \binom{t}{1}\Delta y_0 + \binom{t}{2}\Delta^2 y_0 + \cdots + \binom{t}{n}\Delta^n y_0} \quad (\text{للحفظ})$$

ملاحظة :

$$\begin{aligned}
x = x_0 \Rightarrow t = 0 \;&\Rightarrow \bar{P}_n(0) = y_0 \\
x = x_1 \Rightarrow t = 1 \;&\Rightarrow \bar{P}_n(1) = y_1 \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
x = x_n \Rightarrow t = n \;&\Rightarrow \bar{P}_n(n) = y_n
\end{aligned}$$

مثال :

باستخدام طريقة نيوتن الأمامية أوجد حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول ثم أوجد بشكل تقريبي $f(2.35)$

x	2.1	2.2	2.3	2.4
y	0.61	1.09	1.58	2.09

الحل :

نلاحظ أن نقاط الارتكاز متساوية البعد فيما بينها حيث : $x_0 = 2.1 \ , \ h = 0.1 \ , \ n = 3$

نجري التحويل : $t = \frac{x-x_0}{h} = \frac{x-2.1}{0.1} = 10x + 21$ نكتب جدول الفروق الأمامية :

x	2.1	2.2	2.3	2.4
y	0.61	1.09	1.58	2.09
Δy	0.48	0.49	0.51	
$\Delta^2 y$	0.01	0.02		
$\Delta^3 y$	0.01			

فتكون حدودية الاستيفاء حسب نيوتن الأمامية كما يلي :

$$\bar{P}_3(t) = y_0 + \binom{t}{1}\Delta y_0 + \binom{t}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{t}{3}\Delta^3 y_0$$

$$= y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$P_3(x) = 0.61 + (10x-21)(0.48) + \frac{(10x-21)(10x-22)}{2}(0.01) + \frac{(10x-21)(10x-22)(10x-23)}{6}(0.01)$$

$$\boxed{P_3(x) = \frac{10}{6}x^3 - \frac{21}{2}x^2 + \frac{161}{6}x - 24.87}$$

$$\Rightarrow f(2.35) \approx P_3(2.35) = 1.831875$$

تقدير الخطأ المرتكب في حساب حدودية الاستيفاء بطريقة نيوتن الأمامية :

بفرض $\bar{x} \in [x_0, x_n]$ بحيث $x_i < \bar{x} < x_{i+1}$ عندئذٍ : $\bar{t} = \frac{\bar{x}-x_0}{h}$ حيث $i < \bar{t} < i+1$ فيكون :

$$\boxed{e(\bar{x}) = \binom{\bar{t}}{i+1}\Delta^{i+1} y_0 = \frac{\bar{t}(\bar{t}-1)\dots(\bar{t}-i)}{(i+1)!}\Delta^{i+1} y_0}$$ (للحفظ)

بالعودة للمثال السابق :

لحساب الخطأ المرتكب في حساب $f(2.35)$ نضع :

$$\bar{x} = 2.35 \Rightarrow \bar{t} = 23.5 - 21 = 2.5$$

$$\Rightarrow e(2.35) = \binom{\bar{t}}{2+1}\Delta^{2+1} y_0 = \frac{(2.5)(1.5)(0.5)}{3!}(0.01) = 0.003125$$

مثال2 :

باستخدام طريقة نيوتن الأمامية أوجد حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y = f(x) = ln(x)$ المعرف عند النقاط $1,2,3,4$ ثم أوجد بشكل تقريبي $ln(2.7)$ و الخطأ المرتكب .

الحل :

نلاحظ أن نقاط الارتكاز متساوية البعد فيما بينها حيث : $n = 3 \ , \ h = 1 \ , \ x_0 = 1$

نجري التحويل : $t = \frac{x-x_0}{h} = \frac{x-1}{1} = x - 1$ ثم نكتب جدول الفروق الأمامية :

x	1	2	3	4
y	0	0.6931	1.0986	1.3862
Δy	0.6931	0.4055	0.2876	
$\Delta^2 y$		-0.2876	-0.1179	
$\Delta^3 y$		0.1697		

فتكون حدودية الاستيفاء حسب نيوتن الأمامية كما يلي :

$$\bar{P}_3(t) = y_0 + \binom{t}{1}\Delta y_0 + \binom{t}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{t}{3}\Delta^3 y_0$$

$$= y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$P_3(x) = (x-1)(0.6931) + \frac{(x-1)(x-2)}{2}(-0.2876) + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}(0.1697)$$

$$\Rightarrow P_3(x) = 0.0282x^3 - 0.3131x^2 + 1.435x - 1.1501$$

$$ln(2.7) \approx P_3(2.7) = 0.9969$$

لحساب الخطأ نضع :

$$\bar{x} = 2.7 \Rightarrow \bar{t} = 1.7 \Rightarrow \ i = 1$$

$$e(2.7) = \binom{\bar{t}}{1+1}\Delta^{1+1}y_0 = \binom{\bar{t}}{2}\Delta^2 y_0 = \frac{\bar{t}(\bar{t}-1)}{2}\Delta y_0$$

$$= \frac{(1.7)(0.7)}{2}(-0.2876) = -0.1711$$

وظيفة :

اعد التمرين السابق من أجل التابع $y = f(x) = e^x$ و النقاط $-2,-1,0,1,2$ ثم احسب بشكل تقريبي قيمة $e^{(1.5)}$, $e^{(-0.8)}$ واحسب الخطأ المرتكب .

... انتهت المحاضرة (12) ...