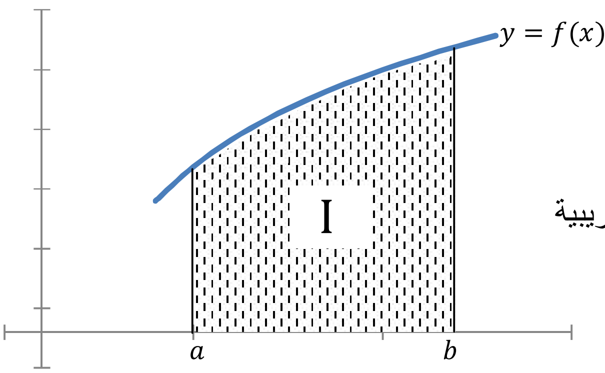
الفصل الرابع : التكامل العددي :

بفرض $f(x)$ تابع مستمر على المجال $[a,b]$ عندئذٍ لايجاد قيمة التكامل $I=\int_a^b f(x)dx$ نوجد التابع الأصلي للتابع $f(x)$ وليكن $F(x)$ فيكون $I=\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

وتكون قيمة التكامل مساحة المنطقة المحصورة بين منحني التابع و المحور $\overrightarrow{ox}$ و المستقيمين $x=a\ ,\ \ x=b$



لكن في بعض الحالات يكون حساب $F(x)$ صعب جداً

مثل : $f(x)=e^{x^2}\cos\big(ln(x+1)\big)$

لذلك نلجأ للحساب العددي للتكامل فنحصل على قيمة تقريبية للتكامل و لذلك نتبع الطرق العددية التالية :

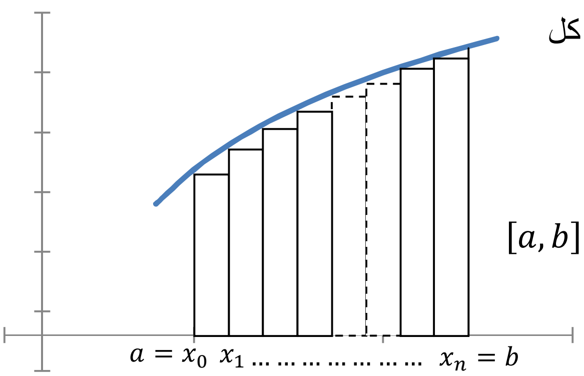
أولاً : طريقة المستطيلات :

بفرض $f(x)$ تابع مستمر على المجال $[a,b]$ عندئذٍ نقوم بتجزئة المجال $[a,b]$ إلى n مجال متساوي الطول حيث طول كل مجال يساوي h حيث $h=\frac{b-a}{n}$

لنضع $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$

فيكون $[a,b]=[x_0,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup\ldots\cup[x_{n-1},x_n]$

عندئذٍ تكون المساحة المطلوبة تساوي تقريباً مجموع مساحات كل من المستطيلات الموضحة بالشكل



ومساحة كل مستطيل هي $i=0,1,\ldots,n-1\ :\ (x_{i+1}-x_i)f(x_i)=h\,f(x_i)$

وبالتالي المساحة الكلية بطريقة المستطيلات تعطى بالقانون

$$\boxed{I=\int_a^b f(x)dx\approx h\big(f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})\big)}$$

نلاحظ أنه كلما كانت n كبيرة كلما كانت القيمة أقرب للتكامل المطلوب .

مثال :

باستخدام طريقة المستطيلات أوجد قيمة تقريبية للتكامل

$$I = \int_0^1 e^{x^2}\cos(ln\,(x+1))dx$$

حيث $n = 5$

الحل :

نوجد قيمة $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0.2$

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8
$f(x)$	1	1.0235	1.1077	1.2779	1.5781

$$I \approx h\big(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)\big)$$
$$= 0.2(1+1.0235+1.1077+1.2779+1.5781) = 1.19744$$

مثال :

باستخدام طريقة المستطيلات أوجد قيمة تقريبية للتكامل

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

من أجل $n = 5$ و $n = 10$

الحل :

<u>من أجل $n = 5$:</u>

نوجد قيمة $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0.2$

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8
$f(x)$	1	0.8333	0.7142	0.625	0.5555

$$I \approx h\big(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)\big)$$
$$= 0.2(1+0.8333+0.7142+0.625+0.5555) = 0.7456$$

من أجل $n = 10$:

نوجد قيمة $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$f(x)$	1	0.909	0.8333	0.7692	0.7142	0.6666	0.625	0.5882	0.5555	0.5263

$$I \approx h\big(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_8) + f(x_9)\big)$$

$$= 0.1\begin{pmatrix} 1 + 0.909 + 0.8333 + 0.7692 + 0.7142 + \\ 0.6666 + 0.625 + 0.5882 + 0.5555 + 0.5263 \end{pmatrix} = 0.1(7.1873) = 0.71873$$

لحساب القيمة الفعلية نكتب :

$$I = [ln\,(x+1)]_0^1 = ln\,(2) = 0.6931$$

نلاحظ أنه عندما $n = 10$ نحصل على قيمة أدق من $n = 5$

وظيفة :

اعد التمرين السابق من أجل

$$I = \int_1^2 \frac{ln\,x}{1+x^4}\,dx$$

من أجل $n = 4$

... انتهت المحاضرة (17) ...