الحاضرة السابقة ٣ / ١٢ / ٢٠١٣

تمارين: ١) عين الوسيط λ كي يتعامد المستويان:
$Q_1(x,y,z) \equiv x + \lambda y - z - 2 = 0$
$Q_2(x,y,z) \equiv 2\lambda x - \lambda y - z + 5 = 0$

٢) أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $M(2,-1,3)$ ويعامد المستويين:
$Q_1(x,y,z) \equiv x + z - 4 = 0$
$Q_2(x,y,z) \equiv x - y + 2z + 1 = 0$

٣) أوجد معادلة المستوي المار بالنقطتين $A(1,4,5)$ ، $B(2,3,-4)$ والذي يوازي الشعاع $\vec{V}(2,1,0)$

٤) أوجد معادلة المستوي المنصف لزاوية المستويين:
$Q_1(x,y,z) \equiv 2x + y + 2z + 1 = 0$
$Q_2(x,y,z) \equiv 4y + 3z + 1 = 0$

الحاضرة السابقة ٣ / ١٢ / ٢٠١٣

المستقيم في الفراغ:
يتعين مستقيم في الفراغ بنقطة معلومة ومنحى معلوم يوازي هذا المستقيم أو بنقطتين أو بتقاطع مستويين.

الحالة الأولى:
إيجاد معادلة مستقيم يمر بنقطة معلومة ويوازي منحى معلوم.

سؤال امتحاني: أوجد المعادلات الديكارتية والوسيطية لمستقيم يمر من نقطة ويوازي منحى معلوم

نقطة معلومة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ومنحى معلوم $\vec{V}(u,v,w)$ ولتكن $M(x,y,z)$ نقطة متحولة على المستقيم المطلوب عندئذ عند جميع أوضاع النقطة M تحقق العلاقة التالية: $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{V} \iff \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{V}$

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{M_0M} &= (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k}\\ \vec{V} &= u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}x - x_0 &= \lambda u\\ y - y_0 &= \lambda v\\ z - z_0 &= \lambda w\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

/ /

$$\left.\begin{aligned}\frac{x-x_0}{u}&=\lambda\\ \frac{y-y_0}{v}&=\lambda\\ \frac{z-z_0}{w}&=\lambda\end{aligned}\right\} \text{①} \Rightarrow \frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}=\frac{z-z_0}{w}=\lambda$$

① المعادلات الديكارتية للمستقيم المطلوب

$$\left.\begin{aligned}x&=x_0+\lambda u\\ y&=y_0+\lambda v\\ z&=z_0+\lambda w\end{aligned}\right\} \text{②}$$

② المعادلات الوسيطية للمستقيم المطلوب.

مثال: أوجد معادلة مستقيم يمر من النقطة $M_0(-2,3,0)$ ويوازي الشعاع $\vec{v}(-1,2,3)$

الحل: المعادلات الديكارتية $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-0}{3}$

المعادلات الوسيطية

$$x=-2-\lambda$$
$$y=3+2\lambda$$
$$z=0+3\lambda$$

الحالة (2): لتكن لدينا النقطتان: $M_1(x_1,y_1,z_1)$، $M_2(x_2,y_2,z_2)$ نقطتين معلومتين والمطلوب: ايجاد معادلة مستقيم يمر بـ M_1 و M_2.

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة متحولة تقع بالمستقيم المطلوب وعندئذ تحقق جميع أوضاع النقطة M العلاقة التالية:

$$\overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{M_1M_2} \Longleftrightarrow \overrightarrow{M_1M}=\lambda\,\overrightarrow{M_1M_2}$$

$$\left.\begin{aligned}x-x_1&=\lambda(x_2-x_1)\\ y-y_1&=\lambda(y_2-y_1)\\ z-z_1&=\lambda(z_2-z_1)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad \text{③}$$

③ المعادلات الديكارتية.

$$\left.\begin{aligned}x&=x_1+\lambda(x_2-x_1)\\ y&=y_1+\lambda(y_2-y_1)\\ z&=z_1+\lambda(z_2-z_1)\end{aligned}\right\} \text{④} \Rightarrow$$

④ المعادلات الوسيطية

تطبيق: أوجد معادلة مستقيم يمر بالنقطتين $M_1(5,2,-1)$، $M_2(3,2,4)$

تعطى المعادلات الديكارتية لمستقيم يمر بنقطتين معلومتين بجموعة المعادلات

③: $\frac{x-5}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+1}{-3}$

/ /

(4) تعطى المعادلات الوسيطية لمستقيم مار بنقطتين معلومتين بالعلاقات
$x = 5 - 2\lambda \quad , \quad y = 2 + 5\lambda \quad , \quad z = -1 - 3\lambda$

الحالة ((3)):

إيجاد المعادلات الوسيطية لمستقيم معطى بتقاطع مستويين:
ليكن لدينا المستويان المتقاطعين $Q_1 = P_1 x + q_1 y + r_1 z + h_1 = 0$
$Q_2 = P_2 x + q_2 y + r_2 z + h_2 = 0$. ترد هذه المسألة إلى الحالة الأولى
وذلك بتعيين نقطة تنتمي إلى تقاطع المستويين أي تنتمي إلى الفصل
المشترك (المستقيم D) وتحديد منحى الفصل المشترك (أي منحى المستقيم
D): أ) من أجل تعيين النقطة نعطي قيمة اختيارية لأحد المجاهيل
(x, y, z) نعوضها في معادلتي المستويين فنحصل على جملة معادلتين
بمجهولين نحل هذه الجملة فنكون قد حددنا احداثيات نقطة تنتمي
الى المستقيم D.

ب) من أجل تحديد منحى D: نعلم أن ناظم المستوي عامودي على الفصل المشترك
أي منحى المستقيم D هو الجداء الخارجي لناظمي المستويين وبذلك
نكون قد رددنا المسألة إلى الحالة الأولى.

مثال: عين وسطاء توجيه الفصل المشترك للمستويين:
$Q_2 = 2x - 3y + 6z - 12 = 0 \qquad Q_1 = x - 3y + 3z - 6 = 0$

الحل:

$\vec{N_2}(2, -3, 6) \quad \vec{N_1}(1, -3, 3)$

$$\vec{V} = \vec{N_1} \wedge \vec{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k} = -9\vec{i} + 3\vec{k} \Rightarrow$$

$\vec{V}(-9, 0, 3)$

أكتب المعادلات الوسيطية للفصل المشترك: نفرض $x = 0 \Leftarrow$

$$\left.\begin{array}{l} -3y + 3z - 6 = 0 \\ -3y + 6z - 12 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{بالطرح} \quad -3z + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{z = 2}$$

$\Leftarrow y = 0$ ((بالتعويض في المعادلات السابقة)).

ومما يعطي أن النقطة $(0, 0, 2)$ التي نبحث عنها وبالتالي ادت
الى الحالة السابقة الأولى لإيجاد معادلة مستقيم مار بنقطة
معلومة ويوازي منحى معلوم .!!

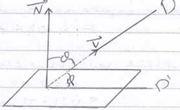
ج). الزاوية بين مستقيمين:

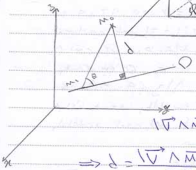
ليكن لدينا المستقيم D_1 منحاه V_1 والمستقيم D_2 منحاه V_2 ان الزاوية بين المستقيمين D_1 و D_2 هي الزاوية بين منحيي هذين المستقيمين أي هي الزاوية بين V_1 و V_2 ونعلم أن الزاوية بين منحيين تحسب من العلاقة التالية:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}|}{|\vec{V_1}|\cdot|\vec{V_2}|}$$

ح). الزاوية بين مستقيم ومستوي: ليكن لدينا المستقيم D منحاه $\vec{V}(u_1,u_2,u_3)$ ولدينا المستوي $Q = px+qy+rz+h=0$ لإيجاد الزاوية بين المستقيم D والمستوي Q نقوم بإيجاد الزاوية بين المستقيم D ومسقط هذا المستقيم على المستوي Q أي بين D و D' ولتكن هذه الزاوية هي الزاوية φ وتحدد هذه الزاوية من علاقة الزاوية بين ناظم المستوي ومنحى D لأنها هي الزاوية المتممة لهذه الزاوية وعليه تكون الزاوية بين المستقيم D والمستوي Q تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{V}\cdot\vec{N}|}{|\vec{V}|\cdot|\vec{N}|}$$





- بعد نقطة عن مستقيم:

$$\sin\theta = \frac{d}{|\vec{M_0M_1}|}$$

$$d = \sin\theta\,|\vec{M_0M_1}|$$

$$|\vec{V}\wedge\vec{M_0M_1}| = |\vec{V}|\cdot\underbrace{|\vec{M_0M_1}|\cdot\sin\theta}_{d}$$

$$\Rightarrow d = \frac{|\vec{V}\wedge\vec{M_0M_1}|}{|\vec{V}|}$$

/ /

مثال: احسب بعد النقطة $M_0(1,2,3)$ عن المستقيم

$$x=-3+3\lambda$$
$$y=-2+2\lambda$$
$$z=8-2\lambda$$

M_1 , $\vec{V}$

نأخذ $|\vec{V}\wedge \overrightarrow{M_1M_0}|$

ونعوض في القانون:

$$d=\frac{|\vec{V}\wedge \overrightarrow{M_0M_1}|}{|\vec{V}|}$$

- معادلة حزمة المستويات المارة من مستقيم D:

ليكن لدينا المستقيم D المعين بتقاطع المستويين Q_1 , Q_2 تسمى مجموعة المستويات المارة من هذا المستقيم وعددها لانهائي حزمة المستويات المارة من المستقيم D ندعو Q_1 , Q_2 بأساس الحزمة فإذا كان المستويان Q_1 , Q_2 معينان بالمعادلتين $Q_1=P_1x+q_1y+r_1z+h_1=0$ و $Q_2=P_2x+q_2y+r_2z+h_2=0$ فتعطى معادلة الحزمة بالعلاقة التالية:

$$Q_1(x,y,z)+\lambda Q_2(x,y,z)=0$$
$$P_1x+q_1y+r_1z+h_1+\lambda(P_2x+q_2y+r_2z+h_2)=0$$
$$(P_1+\lambda P_2)x+(q_1+\lambda q_2)y+(r_1+\lambda r_2)z+(h_1+\lambda h_2)=0$$

حيث λ وسيط «عدد حقيقي» من أجل كل قيمة له نحصل على مستوي من مستويات الحزمة

مثال: أوجد معادلة مستوي بالفصل المشترك للمستويين

$Q_1=x-2y-4z+9=0$

$Q_2=2x+3y-z-5=0$

ويوازي الشعاع $\vec{V}(1,2,3)$ ؟

ج) نقوم بإيجاد حزمة المستويات المارة بالمستقيم الناتج من تقاطع المستويين Q_1 , Q_2

$$(1+2\lambda)x+(-2+3\lambda)y+(-4-\lambda)z+9-5\lambda=0$$

بما أن المستوي المطلوب يوازي $\vec{V}$ فناظمه يعامد $\vec{V}$ أي أن جداؤهما الداخلي يساوي الصفر أي يجب أن تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{N_\lambda}\cdot\vec{V}=0$$
$$\overrightarrow{N_\lambda}(1+2\lambda\ ,\ -2+3\lambda\ ,\ -4-\lambda)\Rightarrow$$
$$1(1+2\lambda)+2(-2+3\lambda)+3(-4-\lambda)=0$$
$$1+2\lambda-4+6\lambda-12-3\lambda=0\Rightarrow 5\lambda=15\Rightarrow\boxed{\lambda=3}$$

/ /

نعوض في معادلة الحزمة فنحصل على المستوي المطلوب

ح: شرط تقاطع ثلاث مستويات بمستقيم واحد:

لتكن لدينا المستويات $Q_1 \equiv p_1x+q_1y+r_1z+h_1=0$ ①

$Q_2 \equiv p_2x+q_2y+r_2z+h_2=0$ ② ، $Q_3 \equiv p_3x+q_3y+r_3z+h_3=0$ ③

ان أي مستوي يمر بالفصل المشترك للمستويين Q_1 ، Q_2 له الشكل:

$$(p_1+\lambda p_2)x+(q_1+\lambda q_2)y+(r_1+\lambda r_2)z+h_1+\lambda h_2=0 \quad (4)$$

فإذا كان المستوي Q_3 يمر بالفصل المشترك لـ Q_1 ، Q_2 فإنه باختيار مناسب لقيمة الوسيط λ يجب أن تمثل المعادلتين ③ و ④ نفس المستوي $\Leftarrow$ أن يتحقق التناسب:

$$\frac{p_1+\lambda p_2}{p_3}=\frac{q_1+\lambda q_2}{q_3}=\frac{r_1+\lambda r_2}{r_3}=\frac{h_1+\lambda h_2}{h_3} \quad \ldots (5)$$

ان العلاقة ⑤ ينتج منها ثلاث معادلات بمجهول واحد هو λ نحسب λ من احداها ونتأكد من أنه يحقق الباقية اذا كان ضروري نعوض قيمة λ في معادلة الحزمة يجب أن ينتج Q_3.

مثال: برهن أن المستويات الثلاث تلاقي بمستقيم واحد:

$$Q_1 \equiv x+2y+3z-1=0$$
$$Q_2 \equiv 2x-y-z+2=0$$
$$Q_3 \equiv 7x+4y+7z+1=0$$

$$(1+2\lambda)x+(2-\lambda)y+(3-\lambda)z-1+2\lambda=0$$

$$\frac{1+2\lambda}{7}=\frac{2-\lambda}{4}=\frac{3-\lambda}{7}=\frac{-1+2\lambda}{1}$$

$4+8\lambda=14-7\lambda \longrightarrow 14-7\lambda=12-4\lambda$

$15\lambda=10 \Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{2}{3}}$ ، $-3\lambda=-2 \Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{2}{3}}$

المحاضرة الثامنة. ٤ / ١٢ / ٢٠١٢

شرط تقاطع ثلاث مستويات بنقطة:

ليكن لدينا المستويات $Q_1 = P_1x + q_1y + r_1z + h_1 = 0$

$Q_2 = P_2x + q_2y + r_2z + h_2 = 0$ $Q_3 = P_3x + q_3y + r_3z + h_3 = 0$

حتى تتقاطع المستويات الثلاث بنقطة واحدة يجب أن يكون الجداء المختلط لنواظمها غير معدوم $\neq 0$ ⇐ يجب أن يتحقق:

$$\overrightarrow{N_1}\cdot(\overrightarrow{N_2}\wedge\overrightarrow{N_3}) = \begin{vmatrix} P_1 & q_1 & r_1 \\ P_2 & q_2 & r_2 \\ P_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

انتهت المحاضرة.

المحاضرة التاسعة. ٩ / ١٢ / ٢٠١٢

بعض المسائل التطبيقية على المستقيم:

★ ايجاد معادلة مستقيم يقطع مستقيمين معلومين ويوازي شعاع معلوم:

ليكن لدينا المستقيمين

$D_1 \begin{cases} P_1x + q_1y + r_1z + h_1 = 0 \\ P_2x + q_2y + r_2z + h_2 = 0 \end{cases}$ $D_2 \begin{cases} P_3x + q_3y + r_3z + h_3 = 0 \\ P_4x + q_4y + r_4z + h_4 = 0 \end{cases}$

وليكن لدينا الشعاع $\vec{V}(u,v,w)$ المطلوب ايجاد معادلة مستقيم D يقطع المستقيمين D_1 و D_2 ويوازي V.

١): الحل الهندسي: ان المستقيم المطلوب هو أحد المستقيمين وليكن D_1 يشكلان مستوية وليكن Q' يوازي V وكذلك المستقيم المطلوب والمستقيم D_2 يشكلان مستوية Q'' ان المستقيم المطلوب ما هو الا الفصل المشترك للمستويين Q' و Q''.

٢): الحل التحليلي: ١): نقوم بايجاد حزمة المستويات المارة من المستقيم D_1 ونختار من هذه الحزمة مستوية توازي V

٢): نقوم بايجاد حزمة المستويات المارة من المستقيم D_2 ونختار من هذه الحزمة مستوية توازي V. ان المستقيم المطلوب ما هو الا الفصل المشترك للمستويين السابقين.

نوضح ما سبق من خلال المثال التالي:

أوجد معادلتي المستقيم القاطع للمستقيمين: