محاضرة 1

دراسة المتغيرات العشوائية

دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل:

أولاً: دالة الكثافة الاحتمالية:

ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً مجموعة قيمه $R_x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ إن مجموعة كل الأحداث الأولية w من Ω والتي من أجلها يأخذ المتغير X القيمة x_i تشكل حدثاً نرمز له بـ $[X = x_i]$ ولاحتمال هذا الحدث بـ $P[X = x_i]$ فإن الدالة $f : R \longrightarrow R$ والتي يكون من أجلها:

$$P[X = x_i] = f_X(x_i) \; ; \; i = 1, 2, 3, \dots n$$

تدعى بالدالة الاحتمالية لـ X أو دالة الكثافة الاحتمالية لـ X حيث تحقق الشروط التالية:

$$f_X(x_i) \geq 0 \qquad \forall x_i \in R_X$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_X(x_i) = 1$$

ويمكن أن نصف هذه الدالة بالشكل:

$X = x_i$	x_1	x_2	x_i .....
$P[X = x_i] = f_X(x_i)$	$f_X(x_1)$	$f_X(x_2)$	$f_X(x_i)$ .....

ونرمز للاختزال:

$$P[X = x_i] = P_i$$

f

$$f_X(x_i) = f(x_i)$$

- ملاحظة: نلاحظ أن الأحداث $[X = x_i]_{i \geq 1}$ متنافية مثنى مثنى وهي تشكل تجزئة لـ Ω.

مثال توضيحي:
تجربة إلقاء ثلاث قطع نقدية، وليكن X المتغير الدال على عدد الصور الحاصلة والمطلوب عين دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X؟
الحل:
لدينا $|\Omega| = 2^3 = 8$

$\Rightarrow \Omega = \{TTT, TTH, THT, HTT, HHT, HTH, THH, HHH\}$

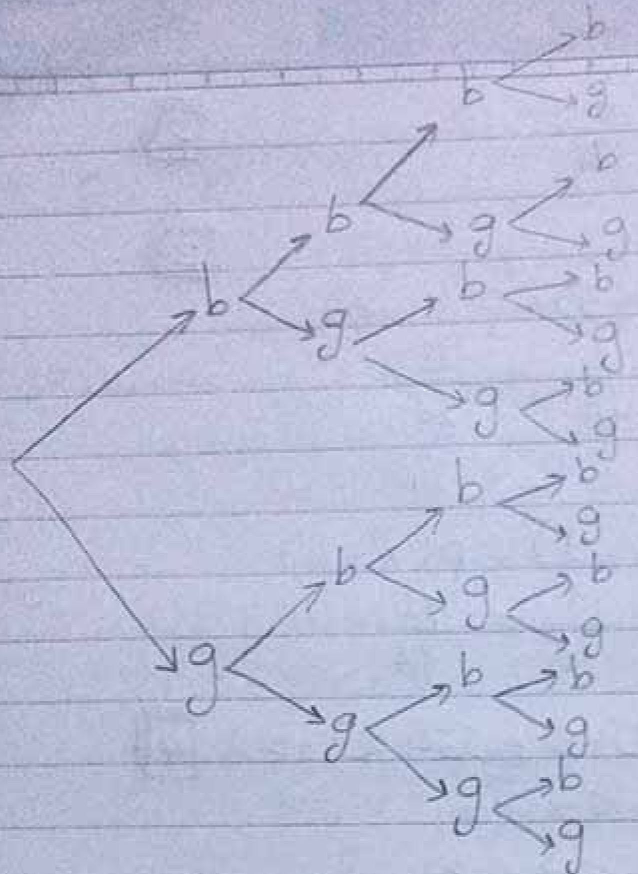
ومجموعة قيم المتغير X هي:

$R_x = \{0, 1, 2, 3\}$

⟸ دالة الكثافة الاحتمالية

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

مثال:
يفرض X متغير عشوائي يدل على عدد الصبيان لدى العائلات التي لديها أربعة أطفال والمطلوب:
1) أكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل X ثم تأكد من أن هذا الجدول يمثل قانون توزيع احتمالي.
2) أوجد احتمال أن يكون لدى هذه العائلة صبيان فقط.
3) أوجد احتمال أن يكون لدى هذه العائلة صبيان على الأقل / على الأكثر
4) أوجد دالة توزيع المتغير العشوائي X.
الحل:
نفرض أن b هو الحدث الدال على الصبي.
و g الحدث الدال على البنت.
ما أن
$|\Omega| = 2^4 = 16$
لإيجاد مكونات فضاء العينة نستعين بالمخطط الشجري التالي:



ومنه فضاء العينة :

$\Omega = \{(bbbb),(bbbg),(bbgb),(bbgg),(bgbb),(bgbg),(bggb),(bggg),(gbbb),(gbbg),(gbbb),(gbbg),(ggbb),(ggbg),(gggb),(gggg)\}$

وبالتالي يكون :

$\boxed{1}$ $R_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
X	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

وهو جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل X

نلاحظ من الجدول أن :

1) $f(x_i) \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5$

2) $\sum_{i=1}^{5} f(x_i) = 1$

وبالتالي الجدول هو جدول قانون احتمالي.

2

$p($ صبيان فقط $) = p(X=2) = \frac{6}{16}$

3

$p($ صبيان على الأقل $) = p(X \geq 2)$

$= p(X=2) + p(X=3) + p(X=4)$

$= \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$

$p($ صبيان على الأكثر $) = p(X \leq 2)$

$= p(X=2) + p(X=1) + p(X=0)$

$= \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$

4 إنّ دالّة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي تعطى بالشكل :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ 1 = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) & x_n \leq x < +\infty \end{cases}$$

وعلى هذا فإنّ دالـة التوزيع لمثالنا المعطى تكون بالشكل :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{16} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{5}{16} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{16} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{15}{16} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & 4 \leq x < +\infty \end{cases}$$

ثانياً: تعريف دالة التوزيع الاحتمالي:

ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً على Ω ولنأخذ الدالة: $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

والمعرفة بالشكل: $F(x) = P[X \leq x]$

وهي تمثل دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل X.

ملاحظة: سنستخدم الرموز الكبيرة $F, G, H, \ldots$ للدلالة على دوال التوزيع الاحتمالية.

وسنستخدم الرموز الصغيرة $f, g, h, \ldots$ للدلالة على دوال الكثافة الاحتمالية.

- وتكمن فائدة دالة التوزيع F في إمكان حساب احتمالات لـ X من الشكل:

$$P[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$$

(ونرمز بـ $F_X(x) = F(x)$ للاختزال)

- إذا كانت $f(x)$ تمثل دالة الكثافة الاحتمالية لـ X فإن:

$$F(x) = \sum_{u \leq x} f(x)$$

وبالتالي من أجل: $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$ فإن:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) & x_{n-1} \leq x < x_n \\ \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1 & x_n \leq x < +\infty \end{cases}$$

مثال توضيحي:

ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{8}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^{x} & ; \; x=0,1,2,3 \\ 0 & ; \; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب: عين جدول الكثافة الاحتمالية لـ X ودالة التوزيع $F(x)$ و احسب $F(2.5)$ ؟

الحل: إنّ جدول الكثافة الاحتمالية يكون من الشكل:

X	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

نلاحظ من الجدول أنّ:

1) $f(x_i) \geq 0 \quad \forall i=1,2,3,4$

2) $\sum_{i=1}^{4} f(x_i) = 1$

والشروط محققة.

وتكون دالة التوزيع بالشكل:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ; \; -\infty < x < 0 \\ \frac{8}{15} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{8}{15}+\frac{4}{15}=\frac{12}{15} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{8}{15}+\frac{4}{15}+\frac{2}{15}=\frac{14}{15} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x < +\infty \end{cases}$$

وبالتالي:

$$F(2.5)=P(X \leq 2.5)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$
$$=\frac{8}{15}+\frac{4}{15}+\frac{2}{1}=\frac{14}{15}$$

حلي

مثال: ألقينا حجري نرد مرتين، ولتكن X المتغير الدال على أكبر الوجهين الحاصلين، و Z المتغير الدال على أصغر الوجهين الحاصلين، والمطلوب:
عين دالة الكثافة الاحتمالية لـ X ودالة الكثافة الاحتمالية لـ Z ثم دالة التوزيع لـ X ودالة توزيع Z.

الحل: لدينا مجموعة نقاط العينة:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

إذاً مجموعة قيم X: $R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ومجموعة قيم Z: $R_Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ولحساب الاحتمالات الموافقة نأخذ كمثال:

$$p(X=2) = p\{(1,2), (2,1), (2,2)\} = \frac{3}{36}$$

$$p(Z=2) = p\{(2,2), (2,3), (3,2), (2,4), (4,2), (2,5), (5,2), (2,6), (6,2)\} = \frac{9}{36}$$

جدول الكثافة الاحتمالية لـ X:

X	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

جدول الكثافة الاحتمالية لـ Z:

Z	1	2	3	4	5	6
$f(z)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

ودالة توزيع X تكون من الشكل:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 1 \\ \frac{1}{36} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{4}{36} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{9}{36} & 3 \leq x < 4 \\ \frac{16}{36} & 4 \leq x < 5 \\ \frac{25}{36} & 5 \leq x < 6 \\ 1 & 6 \leq x < +\infty \end{cases}$$

ودالة توزيع Z تكون من الشكل:

$$F(Z) = \begin{cases} 0 & -\infty < Z < 1 \\ \frac{11}{36} & 1 \leq Z < 2 \\ \frac{20}{36} & 2 \leq Z < 3 \\ \frac{27}{36} & 3 \leq Z < 4 \\ \frac{32}{36} & 4 \leq Z < 5 \\ \frac{35}{36} & 5 \leq Z < 6 \\ 1 & 6 \leq Z < +\infty \end{cases}$$

محاضرة 2

دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي مستمر:

نقول عن الدالة الموجبة $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ أنها دالة كثافة احتمالية لمتغير عشوائي مستمر X إذا تحقق:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

ومن أجل f دالة كثافة احتمالية لـ X نعرف دالة التوزيع الاحتمالي لـ X بـ:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

مثال تعليمي:

ليكن لدينا X متغيراً عشوائياً دالة كثافته معرفة بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & ; \quad 2 \leq x \leq 10 \\ 0 & ; \quad \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب:

1) عين الثابت a لكي تكون الدالة f دالة كثافة

2) أوجد الاحتمال $p(X \leq 5)$ ثم $p(X < 5)$ ثم قارن بينهما.

3) أوجد دالة التوزيع $F(x)$.

الحل:

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ax^2\,dx = 1 \Rightarrow \int_{2}^{10} ax^2\,dx = 1 \Rightarrow a\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^{10} = 1$$

$$\frac{a}{3}[1000 - 8] = 1 \Rightarrow \frac{a}{3}(992) = 1 \Rightarrow$$

$$a = \frac{3}{992}$$

ومنه نصبح دالة الكثافة الاحتمالية بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{992} x^2 & , \quad 2 \leq x \leq 10 \\ 0 & , \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

2) $p(X \leq 5) = \int_{-\infty}^{5} f(x)\, dx = \int_{2}^{5} \frac{3}{992} x^2 dx$

$= \frac{1}{992} [x^3]_2^5 = \frac{1}{992}(125 - 8) = \frac{117}{992}$

سؤال

$p(X < 5) = \int_{-\infty}^{5} f(x)\, dx = \int_{2}^{5} \frac{3}{992} x^2 dx$

$= \frac{1}{992} [x^3]_2^5 = \frac{1}{992}(125 - 8) = \frac{117}{992}$

نلاحظ أنّ $p(X \leq 5) = p(X < 5) + p(X = 5)$

ملاحظة: إنّ احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي المستمر قيمة معينة تساوي إلى الصفر أي وكمثال:

$p[X = 5] = 0$

ملاحظة مهمة

إنّ $p[X = 0] = 0$ وذلك لأنّ $+\infty$ حسب التعريف

$p[X = 5] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{5}^{5} a x^2 = 0$

سؤال

هل هذا الحل صحيح

3) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{2}^{x} f(t)\, dt = \int_{2}^{x} \frac{3}{992} t^2 dt$

$= \frac{1}{992} [t^3]_2^x = \frac{1}{992}(x^3 - 8)$

ملاحظات :

1) $P[X \leq x] = P[X < x]$

2) $P[a \leq X \leq b] = P[a < X \leq b] = P[a \leq X < b] = P[a < X < b]$
$= F(b) - F(a)$

3) $P[a \leq X \leq b] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$

4) $f_X(x) = F'_X(x)$

مثال تعليمي : ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة الكثافة :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases} \qquad , \quad \lambda > 0 \text{ (موجب تماماً)}$$

، المطلوب :

1 - عين λ لكي تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية محلية لـ X .

2 - عين دالة التوزيع الاحتمالي لـ X ، واحسب $F(2.5)$.

الحل :

1) إن الدالة $f(x)$ هي دالة موجبة ، ولكي تصبح دالة كثافة احتمالية محلية يجب أن يتحقق :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-x}\,dx = 1 \Leftrightarrow \lambda \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$$

$$\Leftrightarrow -\lambda \left[e^{-x} \right]_0^{+\infty} = 1$$

$$\Leftrightarrow -\lambda \left[e^{-\infty} - e^{0} \right] = 1 \Leftrightarrow -\lambda [0 - 1] = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = 1}$$

ومنه كثافة X الاحتمالية تصبح من الشكل:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & ; \ x\geqslant 0 \\ 0 & ; \ x<0 \end{cases}$$

2) دالة التوزيع:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int_{0}^{x} e^{-t}\,dt$$

$$=\left[-e^{-t}\right]_{0}^{x}=1-e^{-x} \quad ; \ x\geqslant 0$$

$$\Rightarrow F(x)=\begin{cases} 0 & ; \ x\leq 0 \\ 1-e^{-x} & ; \ x>0 \end{cases}$$

$$F(2.5)=1-e^{-(2.5)}=0.92$$

ملاحظة: نستطيع توظيف دالة الكثافة الاحتمالية في حساب تكاملات صعبة وذلك بالاعتماد على أنه: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$

مثال: ليكن لدينا متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad ; x\in\mathbb{R},\ \mu\in\mathbb{R},\ \sigma>0$$

والمطلوب أوجد قيمة التكامل التالي:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} 5\,e^{-\frac{(x-8)^2}{36}}\,dx \qquad \sigma=\sqrt{18},\ \mu=8$$

الحل: بما أن دالة الكثافة الاحتمالية تحقق:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$$