٦): المجموع المباشر للفضاءات الشعاعية الجزئية:

1-3-5: تعريف: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل F، ولتكن $W_1, W_2, \dots, W_n$ فضاءات شعاعية جزئية في V. نعرف مجموع الفضاءات الشعاعية الجزئية بالشكل:

$$W = \{w = w_1 + w_2 + \dots + w_n : w_i \in W_i\}$$

2- نعرف المجموع المباشر للفضائين الجزئيين W_1, W_2 بالشكل:
$\forall w \in W_1 + W_2$ فإن: يوجد عنصران وحيدان $w_1 \in W_1$ و $w_2 \in W_2$ بحيث $w = w_1 + w_2$

ونرمز للمجموع بالرمز: $W_1 \oplus W_2$

أي $W_1 \oplus W_2$ مجموع مباشر إذا وفقط إذا كان أي عنصر $w \in W_1 \oplus W_2$ فإن w يكتب بشكل وحيد كمجموع عنصرين الأول من W_1 والثاني من W_2.

1-3-5: مبرهنة: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل F ولتكن W_1, W_2 فضائين شعاعيين جزئيين في V. إن $W_1 \oplus W_2$ مجموع مباشر إذا وفقط إذا كان $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ «الصفر عنصر مشترك».

البرهان: $\Longleftarrow$ $0 \in W_1 \cap W_2 \Longleftarrow 0 \in W_1, 0 \in W_2$

$\Leftarrow$ وبالتالي: $\{0\} \subseteq W_1 \cap W_2$

$$\forall w \in W_1 \cap W_2 \Longrightarrow w \in W_1, w \in W_2$$
$$\Rightarrow w \in W_1, -w \in W_2$$
$$0 = w - w \in W_1 + W_2$$

من جهة ثانية الصفر يكتب بشكل $0 = 0 - 0 \in W_1 + W_2$

وبما أن $W_1 \oplus W_2$ فإن الصفر الشعاعي يكتب بشكل وحيد ومنه $w = 0 \Leftarrow W_1 \cap W_2 \subseteq \{0\}$ ومنه

$$W_1 \cap W_2 = [0]$$

$\Longrightarrow$ $\forall w \in W_1 + W_2 \Longrightarrow$

أي w يكتب بشكلين
$\exists w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 ; w = w_1 + w_2$
$\exists w_1' \in W_1, w_2' \in W_2 ; w = w_1' + w_2'$

$/ \quad /$

إن: $0 = w - w = (w_1 + w_2) - (w'_1 + w'_2) \Longrightarrow$

$$\underbrace{w_1 - w'_1}_{\in W_1} = \underbrace{w'_2 - w_2}_{\in W_2} \in W_1 \cap W_2$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} w_1 - w'_1 = 0 \\ w'_2 - w_2 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} w_1 = w'_1 \\ w_2 = w'_2 \end{array}$$

ومنه w يكتب بشكل وحيد وبالتالي مجموع مباشر.

3.3.5: مبرهنة: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل K ولتكن $W_1, W_2, \dots, W_n$ فضاءات شعاعية جزئية من V إن $W = W_1 + W_2 + \dots + W_n$ فضاء شعاعي جزئي من V.

الإثبات: $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}: 0 \in W_i \Rightarrow 0 = 0 + 0 + \dots + 0$

$$\in W \Rightarrow W \neq \phi$$

$\forall \lambda, \mu \in F, \forall w, w' \in W:$

$$w = w_1 + w_2 + \dots + w_n$$

$$w' = w'_1 + w'_2 + \dots + w'_n$$

حيث: $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}; w_i, w'_i \in W_i$

$\Rightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}: \lambda w_i + \mu w'_i \in W_i$

$$\lambda w + \mu w' = \lambda(w_1 + w_2 + \dots + w_n) + \mu(w'_1 + w'_2 + \dots + w'_n)$$

$$= (\lambda w_1 + \mu w'_1) + (\lambda w_2 + \mu w'_2) + \dots + (\lambda w_n + \mu w'_n) \in W$$

وبالتالي W فضاء شعاعي جزئي في V.

مثال: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل $\mathbb{R}^3$ ولتكن

$$W_1 = \{(x, y, z) \in V : 3y + 7z - x = 0\}$$

$$W_2 = \{(x, y, z) \in V : 3y + 5x = 0, 3y + 2z = 0\}$$

أثبت أن $W_1 + W_2$ مجموع مباشر.

الحل: $\forall w = (x, y, z) \in W_1 \cap W_2$

$$\left.\begin{array}{l} w \in W_1 \\ w \in W_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3y + 7z - x = 0 \\ 3y + 5x = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{array}\right.$$

بحل جملة المعادلات السابقة نجد أن $x = y = z = 0$

ومنه $W_1 \cap W_2 = [0]$

وبالتالي: $W_1 + W_2$ مجموع مباشر

تعريف: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل F ولتكن W_1

W_2 فضاءات شعاعية جزئية في V نقول إن W_1, W_2

متكاملان في V إذا وفقط إذا تحقق $V = W_1 \oplus W_2$

ملاحظة: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل F ولتكن

W_1 ، W_2 فضاءات شعاعية جزئية في V, W_1, W_2

متكاملان في V إذا تحقق أحد الشرطين:

1) $\forall v \in V$ فإن v يكتب بشكل وحيد

$v = w_1 + w_2 \; ; \; w_1 \in W_1 , w_2 \in W_2$

2) $W_1 \cap W_2 = \{0\} \;\&\; V = W_1 + W_2$

ملاحظة: $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$

وتعرف هذه العلاقة بـ برهنة بول.

مثال: $V = \mathbb{R}^4$ ، $W_1 = \{(x, y, z, t) \in V : x + y = z \; ; \; x - t = z - y\}$

$W_2 = \{(x, y, z, t) \in V : 2x - y + t = 0 \; ; \; x + 2y - z = 0\}$

المطلوب: 1) أوجد قاعدة وبعد W_1

2) أوجد قاعدة وبعد W_2

3) أوجد قاعدة وبعد $W_1 \cap W_2$ هل W_1 و W_2 متكاملان

/ /

الحل: $W_1 = \{(x,y,x+y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$

لأن $t=0$ $\quad x - z + y = (x+y) - (x+y) = 0$

$= \{(x,0,x,0) + (0,y,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1,0,1,0) + y(0,1,1,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Span}(S_1)$

$S_1 = \{(1,0,1,0),(0,1,1,0)\}$

((نبين أن S_1 مستقلة خطياً وبالتالي تكون كقاعدة))

وبالتالي $\dim(W_1) = 2$

وبالمثل: $W_2 = \{(x,y,x+3y,y-2x) : x,y \in \mathbb{R}\}$

$= \{(x,0,x,-2x),(0,y,3y,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1,0,1,-2), y(0,1,3,1) : x,y \in \mathbb{R}\}$

$W_2 = \text{Span}(S_2)$

$: S_2 = \{(1,0,1,-2),(0,1,3,1)\}$

((نبين أن S_2 مستقلة خطياً وبالتالي تكون قاعدة))

$\dim(W_2) = 2$

$\boxed{3}$: حسب مبرهنة بول:

$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1 + W_2) - \dim(W_1) - \dim(W_2)$

لم تنفع لأننا نريد إيجاد $W_1 \cap W_2$

$\forall w = (x,y,z,t) \in W_1 \cap W_2 :$

$$\left.\begin{array}{l} w \in W_1 \\ \\ w \in W_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x + y - z - t = 0 \\ 2x + y + t = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{array}$$

نحسب المحدد ونجد يكون $\neq 0$ وبالتالي يكون لجملة المعادلات الخطية المتجانسة حل وحيد هو الحل الصفري

$x = y = z = t = 0 \Longrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$

ومنه $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$ ومنه حسب مبرهنة بول:

$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - 0 = 2 + 2 = 4$

وبما أن $\dim V = 4$ و $W_1 + W_2$ فضاء شعاعي جزئي

في V وبعده يساوي بعد الفضاء الشعاعي V ومنه

$V = W_1 + W_2$. وبما أن $W_1 \cap W_2$ يساوي الفضاء الصفري

بأنه تكون المجموعة الخالية ϕ في قاعدة الفضاء $W_1 \cap W_2$

وبالتالي $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$ ومنه $V = W_1 + W_2$

أي أنه W_1 و W_2 متكاملين.

و. هـ. م

انتهت الحصة

---

1 / 12 / 2012 «أول حصة لحادية عشرة»

مبرهنة: ليكن V فضاء شعاعي موضوع على حقل F وليكن

$W_1 = span(S_1)$; $W_2 = span(S_2)$; W_1 ، W_2 فضاء شعاعي جزئي

في V حيث $S_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ، $S_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$

مجموعات جزئية من V . وإذا كانت $S = S_1 \cup S_2$ فإن $V = W_1 + W_2$

إذا وفقط إذا كان $V = span\, S$.

الإثبات: "$\Longleftarrow$" الفرض: $V = W_1 + W_2$

المطلوب: $V = span(S)$

$\forall v \in V = W_1 + W_2 \Longrightarrow \exists w_1 \in W_1 ; w_2 \in W_2 ; v = w_1 + w_2$

$w_1 \in W_1 \Longrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F ; w_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$

$w_2 \in W_2 \Longrightarrow \exists M_1, M_2, \dots, M_m \in F ; w_2 = M_1 u_1 + M_2 u_2 + \dots + M_m u_m$

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + M_1 u_1 + \dots + M_m u_m$$

ومنه v يكتب كتركيب خطي بدلالة عناصر S

$S = S_1 \cup S_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_m\}$

$\Longleftarrow$ $V = span(S)$

$\forall v \in V = span(S) : \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, M_1, M_2, \dots, M_m \in F$

$$v = \underbrace{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n}_{\in W_1} + \underbrace{M_1 u_1 + M_2 u_2 + \dots + M_m u_m}_{\in W_2}$$