تحليل (111) / علي / المحاضرة الثالثة: ٢ / ١٢ / ٢٠١٢

أوجد نهاية كل من المتتاليات التالية:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{n^2+n}-n\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\frac{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt{1}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$=1$$

تذكير: خاصية سابقة

$$\square=e^{\ln\square}=\ln e^{\square}$$

$$\square>0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$ مبرهنة

$$\left.\begin{array}{l}U_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\ x=\frac{1}{n}\Rightarrow\frac{1}{x}=n\\ n\to\infty \text{ عندما}\\ x\to 0 \text{ فإن}\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}$$

$$=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=e^1=e:\lim\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

وبالتالي:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+3}\right)^n$$

$$U_n=\frac{n-2}{n+3}=1-1+\frac{n-2}{n+3}$$

$$=1+\frac{-n-3+n-2}{n+3}$$

$$=1-\frac{5}{n+3}$$

$$-\frac{5}{n+3}=\frac{1}{N}$$

$$-5N=n+3\Rightarrow\boxed{n=-5N-3}$$

$$\lim_{N\to\infty}\left[1+\frac{1}{N}\right]^{-5N-3}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left[1+\frac{1}{N}\right]^{-5N}\cdot\lim_{N\to\infty}\left[1+\frac{1}{N}\right]^{-3}$$

$$=\left(\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^N\right)^{-5}\cdot\lim_{N\to\infty}\left[1+\frac{1}{N}\right]^{-3}$$

$$=e^{-5}\cdot 1=e^{-5}$$

$$= \frac{\frac{1}{3^{n-1}} - 1}{\frac{1}{5^{n-1}} - 1}$$

$$\lim_{n \to \infty} U_n = +1$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+1} + \sin\frac{n\pi}{3}}{3^n}$$

$$U_n = \frac{3^{n+1} + \sin\frac{n\pi}{3}}{3^n}$$

$$= \frac{3^{n+1}}{3^n} + \frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{3^n}$$

$$= 3 + \frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{3^n}$$

نعلم أن: $-1 \leqslant \sin\frac{n\pi}{3} \leqslant 1$

$$-\frac{1}{3^n} \leqslant \frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{3^n} \leqslant \frac{1}{3^n}$$

$$\lim_{n \to \infty} -\frac{1}{3^n} \leqslant \lim_{n \to \infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{3^n} \leqslant \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3^n}$$

$$0 \leqslant \lim \frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{3^n} \leqslant 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{3^n} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^m}{e^n} \quad : m \in \mathbb{N}^*$$

إشارة: $f(x) = \frac{x^n}{e^x}$

$$\lim_{n \to \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^m}{e^n} \quad : m \in \mathbb{N}^*$$

$$f(x) = \frac{x^m}{e^x} = \frac{e^{\ln x^m}}{e^x}$$

$$= \frac{e^{m \ln x}}{e^x} = e^{x \ln(X - X)}$$

$$= e^{x\left[m \frac{\ln x}{x} - 1\right]}$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x) = e^{\infty[0-1]} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^m}{e^n} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3 \cdot 5^n - 3^n \cdot 5^n}{3^n \cdot 5 - 3^n \cdot 5^n}$$

$$U_n = \frac{3 \cdot 5^n - 3^n \cdot 5^n}{3^n \cdot 5 - 3^n \cdot 5^n}$$

$$= \frac{\frac{3 \cdot 5^n}{3^n \cdot 5^n} - \frac{3^n \cdot 5^n}{3^n \cdot 5^n}}{\frac{3^n \cdot 5}{3^n \cdot 5^n} - \frac{3^n \cdot 5^n}{3^n \cdot 5^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 3$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n} = \frac{1-b}{1-a}$$

حيث $|a|<1$ ، $|b|<1$

إشارة:

$$S_n = 1+a+a^2+\dots+a^n$$

$$aS_n = a+a^2+\dots+a^n+a^{n+1}$$

$$S_n - aS_n = 1 - a^{n+1}$$

$$S_n(1-a) = 1 - a^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

نعود إلى التمرين:

$$\lim \frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}} = \frac{\frac{1}{1-a}}{\frac{1}{1-b}} = \frac{1-b}{1-a}$$

نعلم أن:

$$\lim_{n\to\infty} a^{n+1} = 0 : |a|<1$$

$$\lim_{n\to\infty} b^{n+1} = 0 : |b|<1$$

وظيفة: أثبت أن:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

احسب نهاية:

1) $$\lim \frac{3+9+15+\dots+3(2n-1)}{2(n^2+1)}$$

2) $$\lim \left(\frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

3) $$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n(\sqrt{n^2+n}-n)}$$

4) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

الحل: $\boxed{4}$

$$f(x) = \sqrt[x]{x}$$

$$= e^{\ln \sqrt[x]{x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}$$

$$= e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = e^0 = 1 : \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

انتهت المحاضرة