٩/١٢/٢٠١٢م تحليل عملي (١١) الحلقة الرابعة

١) ادرس تقارب كل من المتسلسلات الآتية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n+n}$$

$$a_n = \frac{1}{5^n+n} \Rightarrow \frac{1}{5^n+n} < \frac{1}{5^n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

بما أن $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ متقاربة لأنها متسلسلة هندسية أساسها $|q|<1$: q

حسب معيار المقارنة نجد أن $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n+n}$ متقاربة

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \sin\frac{1}{n}$$

$$a_n = n \cdot \sin\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \; ; \; \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

بما أن الحد العام لا يسعى الى الصفر فإن المتسلسلة متباعدة (حسب معيار الصفري)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$$

$$a_n = \frac{n^k}{n!} \; , \; a_{n+1} = \frac{(n+1)^k}{(n+1)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^k}$$

$$= \frac{(n+1)^k}{n^k} \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{n+1}$$

/ /

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \cdot 0 = 0 < 1$$

المتسلسلة متقاربة حسب معيار دالامبير

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

$$a_n = \frac{n^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \frac{(n+1)^n \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}\, \cancel{n!}\, n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e > 1$$

متباعدة حسب معيار دالامبير

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}$$

$$a_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^2$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < 1$$

المتسلسلة متقاربة حسب كوشي الجذر النوني.

إفادة: عاملي عاملي (!!) أي أنه جداء تعاقب عددين عددين أي

$$7!! = 7 \times 5 \times 3 \times 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$a_{n+1} = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}$$

$$= \frac{(2n+1)(2n-1)!!}{(2n+2)(2n)!!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)\cancel{(2n-1)!!}}{(2n+2)\cancel{(2n)!!}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!!}}{\cancel{(2n-1)!!}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

يفشل المعيار ((دالامبير))

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) =$$

$$n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right)$$

$$= n\left(\frac{2n+2-2n-1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{2} < 1$$

متباعدة حسب معيار رابي.

فإن $\sum_{0}^{\infty} b_n$ متباعدة حسب البيان

فإن $\sum_{0}^{\infty} a_n$ متباعدة حسب معيار النسبة.

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{3n}{n^3+1}$$

$$a_n = \frac{3n}{n^3+1}, \quad b_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{3n}{n^3+1} \cdot \frac{n^2}{1} = \frac{3n^3}{n^3+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 3$$

ومنه المتسلسلتان من نوع واحد وبما أن $\sum b_n$ متقاربة حسب معيار البيان فإن $\sum a_n$ متقاربة حسب معيار النسبة.

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$$

$$a_n = \frac{2n-1}{2^n}, \quad b_n = \frac{n}{2^n}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2n-1}{2^n} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{2n-1}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 2$$

المتسلسلتان من نوع واحد

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{2} < 1$$

ومنه $\sum b_n$ متقاربة أي أن $\sum a_n$ متقاربة حسب معيار النسبة.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

$$a_n = \frac{1}{n^3}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^3}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$ يفشل معيار دالامبير

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

$$= n\left(\frac{n^3}{n^3+3n^2+3n+1} - 1\right)$$

$$= \frac{3n^3+3n^2+n}{n^3+3n^2+3n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 3 > 1$$

متقاربة حسب معيار راب.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+2}$$

$$a_n = \frac{n+3}{n^2+2}, \quad b_n = \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n+3}{n^2+2} \cdot \frac{n+1}{1}$$

$$= \frac{n^2+4n+3}{n^2+2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

المتسلسلتان من نوع واحد وبما أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\left(\frac{2}{n}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n = \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \\ b_n = \frac{2}{n} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 1 ; \lim_{\theta\to 0} \frac{\ln(1+\theta)}{\theta} = 1$$

وبما ان $\sum b_n$ متباعدة حسب اختبار p فان $\sum a_n$ متقاربة حسب معيار المقارنة

$$\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3}\right)^n$$

تمرين وظيفة

انتهت المحاضرة