17/11/2013

المحاضرة الثانية عشرة

تعيين محور الفتل الآني تحليلياً

تعريف محور الفتل الآني:

هو المحل الهندسي للنقاط التي تكون سرعتها موازية دائماً لشعاع الدوران الآني

$$\forall\, o' \in \Delta \,,\quad \vec{v}(o') \parallel \vec{\omega}$$

على المتغيرة

$$\frac{v_x(o')}{p} = \frac{v_y(o')}{q} = \frac{v_z(o')}{r} \rightarrow$$

معادلتي سطح $\rightarrow$

على الثابتة:

$$\frac{v_{x_1}(o')}{p_1} = \frac{v_{y_1}(o')}{q_1} = \frac{v_{z_1}(o')}{r_1}$$

ونحسب $\vec{v}(o')$ من العلاقة:

$$\vec{v}(o') = \vec{v}(o) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oo'}$$

على المتماسكة

$$\rightarrow \vec{v}(o) = (v_x(o), v_y(o), v_z(o))$$

$$\rightarrow \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oo'} = (qz - ry, rx - pz, py - xq)$$

على المتماسكة

$$\rightarrow \vec{v}(o') = (v_x(o) + qz - ry, v_y(o) + rx - pz, v_z(o) + py - xq)$$

على الثابتة

$$\rightarrow \vec{v}(o') = (v_{x_1}(o) + q_1(z_1 - z_0) - r_1(y_1 - y_0), v_{y_1}(o) + r_1(x_1 - x_0) - p_1(z_1 - z_0), v_{z_1}(o) + p_1(y_1 - y_0) - (x \quad)q_1)$$

على المتماسكة $o'(x, y, z)$

على الثابتة $o'(x_1, y_1, z_1)$

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oo'} = \begin{vmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}$$

إذاً محور الفتل يتحرك في الفراغ الثابت وفي الفراغ المتماسك مع الجسم فهو يرسم سطحاً ما في الفراغ الثابت نسميه القاعدة وسطحاً ما في الفراغ المتماسك و نسميه المتدحرج.

تعيين خطوة اللولب:

$$b = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{v}(0)}{\omega^2}$$

← على المتماسكة:

$$b = \frac{p\, v_x(0) + q\, v_y(0) + r\, v_z(0)}{p^2 + q^2 + r^2}$$

← على الثابتة:

$$b = \frac{p_1 v_{x_1}(0) + q_1 v_{y_1}(0) + r_1 v_{z_1}(0)}{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}$$

تمرين: لتكن لدينا ثلاثة نقاط $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(1,1,1)$

في لحظة معينة تكون سرع هذه النقاط:

$\vec{v}(A) = (2,1,-3)$, $\vec{v}(B) = (0,3,-1)$, $\vec{v}(C) = (-1,2,-1)$

و المطلوب:

عين عناصر الحركة اللولبية المماسة للحركة في اللحظة المذكورة. [عين عناصر الفتل المقابل لهذه الحركة]

الحل: نريد تعيين $(\Delta , O' \in \Delta , \vec{\omega} , b)$

لتكن A هي قطب الحركة

$$\vec{v}(B) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$(0,3,-1) = (2,1,-3) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$(0,3,-1) = (2,1,-3) + (-r, r, p-q)$

$\Rightarrow \quad 0 = 2 - r \longrightarrow \boxed{r = 2}$

$3 = 1 + r$

$-1 = p - q - 3 \Rightarrow \boxed{p - q = 2}$

$\star \ \vec{v}(C) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \wedge \vec{AC}$

$$(-1,2,-1) = (2,1,-3) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$(-1,2,-1) = (2,1,-3) + (q-r, r-p, p-q)$

$-1 = 2 + q - r \Rightarrow q = -1$

$2 = 1 + r - p \longrightarrow p = 1$

$-1 = p - q$

$\Longrightarrow \vec{\omega}(1, -1, 2)$ شعاع الدوران

تعيين محور لفتل:

$O'(x, y, z)$

$\vec{v}(O') = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \wedge \vec{O'A}$

$$\vec{v}(O') = (2,1,-3) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$\vec{v}(O') = (2 - z - 2y, 1 + 2x - z, -3 + y + x)$

معادلات محور لفتل

$$\Delta : \frac{2 - z - 2y}{1} = \frac{1 + 2x - z}{-1} = \frac{-z + y + x}{2}$$

من ① و ②: $-2+z+2y=1+2x-z \rightarrow 2x-2y-2z+3=0$

من ① و ③: $4-2z-4y=-3+y+x \rightarrow x+5y+2z-7=0$

نفرض $y=0 \leftarrow$

$$\xleftarrow{\text{بالجمع}} \begin{cases} 2x-2z+3=0 \\ x+2z-7=0 \end{cases}$$

$$3x-4=0 \rightarrow x=\frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3}+2z-\frac{21}{3}=0 \rightarrow \frac{-17}{3}+2z=0 \rightarrow z=\frac{17}{6}$$

$$\Rightarrow O'\left(\frac{4}{3}, 0, \frac{17}{6}\right)$$

$$b=\frac{\vec{\omega}\cdot\vec{v}(A)}{\omega^2}=\frac{(1,-1,2)(2,1,-3)}{1+1+4}=\frac{2-1-6}{6}=\frac{-5}{6}$$

سؤال إضافي: هل تنتمي $D(0,0,1)$ حيث $\vec{v}(D)=(2,1,-3)$ إلى الجسم في الجسم للحظة؟؟

$$\vec{v}(D) \overset{?}{=} \vec{v}(A)+\vec{\omega}\wedge\vec{AD}$$

$$(2,1,-3) \overset{?}{=} (2,1,-3)+\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$2=2-1 \Rightarrow -1 \neq 0$

$1=1-1 \Rightarrow -1 \neq 0$

$-3=-3$

$\Rightarrow D \notin$ الجسم

أو نطبق نظرية الإسقاط:

[illegible]:

$$\vec{v}(D)\cdot\overrightarrow{AD} \overset{?}{=} \vec{v}(A)\cdot\overrightarrow{AD}$$
$$\vec{v}(D)\cdot\overrightarrow{BD} \overset{?}{=} \vec{v}(B)\cdot\overrightarrow{BD}$$
$$\vec{v}(D)\cdot\overrightarrow{CD} \overset{?}{=} \vec{v}(C)\cdot\overrightarrow{CD}$$

مسألة:

جسم صلب يتحرك وفق المعادلات:

$$x_p = 0 ,\ y_p = \sin t ,\ z_p = \cos t$$

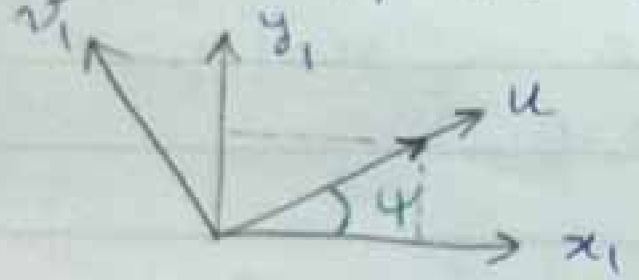
$$\psi = t ,\ \theta = t ,\ \varphi = 0$$

حيث P قطب الحركة والمطلوب:

عين معادلات محور الفتل وخطوة اللولب في الحركة اللولبية المماسة للحركة العامة ثم عين محور الفتل وخطوة اللولب في اللحظة $t=0$

الحل:

$$\vec{\omega} = \psi'\vec{k_1} + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{k}$$
$$= \vec{k_1} + \vec{u} = \vec{k_1} + (\cos\psi\,\vec{i_1} + \sin\psi\,\vec{j_1})$$



العمل هنا على الثابتة

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = \cos t\,\vec{i_1} + \sin\psi\,\vec{j_1} + \vec{k_1}}$$

تعيين Δ: نختار $O'(x_1, y_1, z_1) \in \Delta$ حيث $\vec{v}(O') \parallel \vec{\omega}$

وذلك:

$$\vec{v}(O') = \vec{v}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PO'}$$

$$\vec{v}(O') = (0, \cos t, -\sin t) + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ \cos t & \sin t & 1 \\ x_1 - 0 & y_1 - \sin t & z_1 - \cos t \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{v}(o') = (z_1 \sin t - \sin t \cos t - y_1 + \sin t,\ \cos t + x_1 - z_1 \cos t + \cos^2 t,\ - \sin t + y_1 \cos t - \sin t \cos t - x_1 \sin t)$$

$$\Delta: \frac{z_1 \sin t - \sin t \cos t - y_1 + \sin t}{\cos t} = \frac{\cos t + x_1 - z_1 \cos t + \cos^2 t}{\sin t}$$

$$= \frac{-\sin t + y_1 \cos t - \sin t \cos t - x_1 \sin t}{1}$$

خطوة اللولب :

$$b = \frac{\vec{v}(P) \cdot \vec{\omega}}{\omega^2} = \frac{(0, \cos t, -\sin t)(\cos t, \sin t, 1)}{\cos^2 t + \sin^2 t + 1}$$

$$= \frac{\cos t \sin t - \sin t}{2}$$

في اللحظة $t=0 \leftarrow$

$$\Delta: \frac{-y_1}{1} = \frac{2 + x_1 - z_1}{0} = \frac{y_1}{1}$$

من ① و ③ $\rightarrow$ $-y_1 = y_1 \rightarrow 2y_1 = 0 \rightarrow y_1 = 0$

$$0 = 2 + x_1 - z_1 \Rightarrow x_1 - z_1 = -2$$

$$\rightarrow b = \frac{0}{2} = 0$$

$$\underset{t=0}{\vec{v}(P)} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{\omega}(1, 0, 1)$$

شعاع الدوران موجود

إذاً الحركة مماسة لحركة دورانية لأنّ $b = 0$ (خطوة اللولب).