ثالثاً : طريقة التكرار :

بفرض $f(x,y)$, $g(x,y)$ تابعان قابلان للاشتقاق و الاشتقاق الجزئي بالنسبة للمتحولات (x,y)

ولنكتب $x = F(x,y) \quad \& \quad y = G(x,y)$

وبفرض A جوار ما للجذر $(\bar{x},\bar{y})$ الخاص بالجملة $(*)$ وبفرض (x_0,y_0) نقطة من هذا الجوار ، إذا كان :

$$\exists\, 0 < k < 1 \,; \forall (x,y) \in A \;\Rightarrow\; \begin{cases} |F_x| + |F_y| \le k \\ |G_x| + |G_y| \le k \end{cases}$$

عندئذٍ فإن الحل المشترك للجملة $(*)$ انطلاقاً من النقطة $(x_0\,,y_0)$ حسب طريقة التكرار يعطى بالقوانين التكرارية التالية :

$$\boxed{\boxed{x_{n+1} = F(x_n\,,y_n)} \qquad \& \qquad \boxed{y_{n+1} = G(x_n\,,y_n)}}$$ (للحفظ)

وبفرض ε الدقة المطلوبة عندئذٍ نتوقف عن التكرار عندما

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \quad \& \quad |y_{n+1} - y_n| < \varepsilon$$

و يكون $$(x_n\,,y_n) \xrightarrow{n\to\infty} (\bar{x},\bar{y})$$

مثال :

باستخدام طريقة التكرار و انطلاقاً من النقطة $(0.5\,,0.5)$ أوجد حل مشترك تقريبي للجملة :

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0 \qquad \& \qquad g(x,y) = x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0$$

بدقة $\varepsilon = 0.005$

الحل :

نكتب المعادلتين من الشكل

$$x = F(x,y) = \frac{x^3}{6} + \frac{y^3}{6} + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow F_x = \frac{x^2}{2} \quad \& \quad F_y = \frac{y^2}{2}$$

$$y = G(x,y) = \frac{x^3}{6} - \frac{y^3}{6} + \frac{1}{3} \quad \Rightarrow G_x = \frac{x^2}{2} \quad \& \quad G_y = -\frac{y^2}{2}$$

$$\Rightarrow |F_x(x_0\,,y_0)| + |F_y(x_0\,,y_0)| = \frac{{x_0}^2}{2} + \frac{{y_0}^2}{2} = 0.25 < 1$$

$$\& \quad |G_x(x_0\,,y_0)| + |G_y(x_0\,,y_0)| = \frac{{x_0}^2}{2} + \frac{{y_0}^2}{2} = 0.25 < 1$$

ومنه يوجد حل للجملة و ليكن $(\bar{x},\bar{y})$ أي يمكننا تطبيق قوانين التكرار كما يلي :

$x_1 = F(x_0,y_0) = 0.5416$ $y_1 = G(x_0,y_0) = 0.3333$

$x_2 = F(x_1,y_1) = 0.5326$ $y_2 = G(x_1,y_1) = 0.3536$

$x_3 = F(x_2,y_2) = 0.5325$ $y_3 = G(x_2,y_2) = 0.3511$

$|x_3 - x_2| = 0.0001 < \varepsilon$ $|y_3 - y_2| = 0.002 < \varepsilon$

$$\Rightarrow (\bar{x},\bar{y}) \approx (x_3,y_3) = (0.5325\,,0.3511)$$

ويمكننا التحقق حيث أن : $g(x_3,y_3) = 0.0011 \quad \& \quad f(x_3,y_3) = 0.0007$

مثال :

باستخدام طريقة التكرار و انطلاقاً من النقطة $(1.5\,,2)$ أوجد حل مشترك تقريبي للجملة :

$$f(x,y) = e^x - y = 0 \qquad \& \qquad g(x,y) = xy - e^x = 0$$

بدقة $\varepsilon = 0.01$

الحل :

نكتب المعادلتين من الشكل

$$y = F(x,y) = e^x \qquad \Rightarrow F_x = e^x \quad \& \quad F_y = 0$$

$$x = G(x,y) = \frac{e^y}{y} \qquad \Rightarrow G_x = \frac{e^x}{y} \quad \& \quad G_y = -\frac{e^x}{y^2}$$

$$\Rightarrow |F_x(x_0\,,y_0)| + |F_y(x_0\,,y_0)| = 4.4816 > 1$$

$$\& \; |G_x(x_0\,,y_0)| + |G_y(x_0\,,y_0)| = 3.3612 > 1$$

و بالتالي اختيار التوابع F و G ليس موفق لذا نحاول بطريقة أخرى أي :

$$x = F(x,y) = \ln y \qquad \Rightarrow F_x = 0 \quad \& \quad F_y = \frac{1}{y}$$

$$y = G(x,y) = \frac{e^x}{x} \qquad \Rightarrow G_x = \frac{xe^x - e^x}{x^2} \quad \& \quad G_y = 0$$

$$\Rightarrow |F_x(x_0\ , y_0)| + |F_y(x_0\ , y_0)| = \frac{1}{2} = 0.5 < 1$$

$$\& \quad |G_x(x_0\ , y_0)| + |G_y(x_0\ , y_0)| = 0.9959 < 1$$

ومنه يوجد حل للجملة و ليكن $(\bar{x}, \bar{y})$ أي يمكننا تطبيق قوانين التكرار كما يلي :

$$x_1 = F(x_0, y_0) = 0.6931 \qquad y_1 = G(x_0, y_0) = 2.9877$$

$$x_2 = F(x_1, y_1) = 1.0945 \qquad y_2 = G(x_1, y_1) = 2.8854$$

$$x_3 = F(x_2, y_2) = 1.0596 \qquad y_3 = G(x_2, y_2) = 2.7297$$

$$x_4 = F(x_3, y_3) = 1.0041 \qquad y_4 = G(x_3, y_3) = 2.7229$$

$$x_5 = F(x_4, y_4) = 1.0016 \qquad y_5 = G(x_4, y_4) = 2.7183$$

$$|x_5 - x_4| = 0.0025 < \varepsilon \qquad |y_5 - y_4| = 0.0046 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \approx (x_5, y_5) = (1.0016\ , 2.7183)$$

ويمكننا التحقق حيث أن : $f(x_5, y_5) = 0.004 \quad \& \quad g(x_3, y_3) = 0.0001$

وظيفة :

أوجد الحل المشترك للجملة انطلاقاً من النقطة $(1,1)$

$$f(x,y) = x - \sin y = 0 \qquad \& \qquad g(x,y) = y - \cos x = 0$$

بدقة $\varepsilon = 0.015$ باستخدام الطرق الثلاثة (نيوتن و نيوتن المبسطة و التكرار)

... انتهت المحاضرة (16) ...