4/12/2013

التابع التحليلي:

بفرض $w=f(z)$ تابع عقدي قابل للاشتقاق على المنطقة D عندئذٍ نقول عن $f(z)$ أنه تحليلي على المنطقة [مفتوحة ومترابطة] على المنطقة D ونقول عن $f(z)$ أنه تحليلي عند النقطة $z_0 \in \mathbb{C}$ إذا كان تحليلي في جوار ما للنقطة z_0.

مبرهنة: بفرض $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تابع تحليلي على المنطقة D عندئذٍ معادلتي كوشي - ريمان محققتان أي:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}}$$

الإثبات:

بما أن f تحليلي على المنطقة D فهو قابل للاشتقاق عند كل نقطة $z_0 \in D$ حيث $z_0=x_0+iy_0$ ومنه:

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{[u(x,y)-u(x_0,y_0)]+i[v(x,y)-v(x_0,y_0)]}{(x-x_0)+i(y-y_0)}$$

وبما أن $f'(z_0)$ موجودة فهي موجودة على أي مسار لاقتراب z من z_0

نأخذ المسار الموازي للمحور الحقيقي وفيه يكون "$y=y_0$"

$$\rightarrow f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\ \ldots\ldots\ (1)$$

نأخذ المسار الموازي للمحور التخيلي وفيه يكون "$x=x_0$"

$$\rightarrow f'(z_0)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial x}\ \ldots\ldots\ (2)$$

نطابق ① مع ② فنجد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

وهو المطلوب

مبرهنة: بفرض $u(x,y)$ ، $v(x,y)$ تابعان حقيقيان يملكان مشتقات جزئية مستمرة و تحقق معادلتي كوشي - ريمان عندئذ التابع:

$w = f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ قابل للاشتقاق و مشتقه يعطى بالعلاقة:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

الإثبات:

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)$$

$$= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y+\Delta y) + u(x, y+\Delta y) - u(x,y)$$

$$= \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y+\Delta y)}{\Delta x} \Delta x + \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta y} \Delta y$$

$$\boxed{\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y}$$

بنفس الطريقة نجد أن:

$$\boxed{\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y}$$

ومنه:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)}{\Delta x + i\Delta y}$$

فإنّ معادلتي
كوشي ريمان محققتان

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + \frac{\partial v}{\partial x}(-\overset{i^2}{}\Delta y + i\Delta x)}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

وبطريقة مماثلة نثبت أنّ:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

تمرين تعليمي: أثبت أنّ التابع $w = f(z) = z^2 +$ تحليلي على كامل المستوي العقدي وأوجد مشتقه.

الحل: نفرض $z = x + iy$ عندئذٍ:

$$f(z) = (x+iy)^2 + (x+iy)$$
$$= (x^2 - y^2 + x) + i(2xy + y)$$

ومنه:

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + x$$
$$v(x,y) = 2xy + y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 \ , \ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \ , \ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

نلاحظ أنّ معادلتي كوشي - ريمان محققتان ومنه التابع $f(z)$ قابل للاشتقاق ومشتقه:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= (2x+1) + i(2y) = 2(x+iy) + 1 = 2z + 1$$

تمرين: أثبت أن التابع: $w=f(z)=\bar{z}^2$

غير تحليلي على $\mathbb{C}$

الحل: بفرض $z=x+iy$ عندئذٍ:

$$f(z)=(x-iy)^2$$
$$=(x^2-y^2)-2xy\,i$$

$$\to u(x,y)=x^2-y^2$$
$$v(x,y)=-2xy$$

نلاحظ أن:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-2x$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x}=-2y$$

ومنه معادلتي كوشي-ريمان غير محققتان إلا عندما:

$(x,y)=(0,0)$ ومنه $f(z)=\bar{z}^2$ قابل للاشتقاق عندما

$z=0$ إلا أنه ليس تحليلي عند $z=0$

وظيفة

بفرض $w=f(z)=\bar{z}+|z|^2$ أثبت أن $f(z)$ غير تحليلي

على $\mathbb{C}$ ثم ادرس متى يكون قابل للاشتقاق.

نفرض أن $z=x+iy \Leftarrow$

$$f(z)=(x-iy)+(x^2+y^2)$$
$$=(x^2+y^2+x)-iy$$

$$\to u(x,y)=x^2+y^2+x$$
$$v(x,y)=-y$$

$$\to \frac{\partial u}{\partial x}=2x+1\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2y\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$\Leftarrow$ معادلتي كوشي ريمان غير محققتان $\Leftarrow$ التابع $w=f(z)$ غير تحليلي على $\mathbb{C}$

وتكون محققتان عند $(x,y)=(-1,0)$ ومنه $w=f(z)$ يكون

قابلاً للاشتقاق عندما $z=(-1,0)$ إلا أنه ليس تحليلي عند $z=(-1,0)$