٢٤/١١/٢٠١٣ «المحاضرة التاسعة»

6.2.5 مبرهنة: ليكن V فضاء متجهات معرف على الحقل F

وبعده n اذا كانت $S=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة

عظمى من الأشعة المستقلة خطياً في V فإن S تشكل قاعدة

للفضاء V

البرهان: بما أن S مجموعة عظمى فإن S مستقلة خطياً ومن

تعريف المجموعة العظمى لنبرهن أنها مولدة للفضاء V. $\forall v \in V$

نميز حالتين:

① $v \in S$ فإن $\exists v_i \in S : v = v_i$

وبالتالي يمكن كتابة v بالشكل

$$v = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_{i-1} + v_i + 0v_{i+1} + \dots + 0v_n$$

$$\Rightarrow v = v_i$$

⊙ $v \notin S$ فتكون المجموعة

$S' = S \cup \{v\} = \{v, v_1, v_2, \dots, v_n\}$

مرتبطة خطياً أي أنه يوجد $\exists \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

ليست جميعها أصفاراً تحقق

$$0 = \lambda v + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \dots (*)$$

ومنه تكون $\lambda \neq 0$ لأنه إذا كانت $\lambda = 0$ فإنه

$$0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

وبما أن S مستقلة خطياً فإن $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

ومنه $\lambda \neq 0$ ؛ أي أنه يمكننا أن نقسم العلاقة (*) على λ

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} v_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} v_n$$

وبفرض $\mu_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda}$ من أجل $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n$$

وفي كلا الحالتين v يكتب كتركيب خطي بدلالة عناصر S وحسب تعريف المجموعة المولدة تكون S مولدة للفضاء V وبالتالي تكون S تشكل قاعدة للفضاء V.

5-2-7: مبرهنة: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل K وبعده n. إن $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة عظمى من الأشعة المستقلة خطياً في V إذا وفقط إذا كانت S قاعدة للفضاء V.

ملاحظة: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل K وبعده n:

1): إن أي مجموعة عدد عناصرها أكبر من بعد الفضاء n تكون مرتبطة خطياً.

2): إن المجموعة $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ تولد الفضاء V إذا وفقط إذا كانت المجموعة S تحوي قاعدة للفضاء V

82.5: مبرهنة: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل K بعده n اذا كانت المجموعة الجزئية $S=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ مستقلة خطياً في V فإن S قاعدة للفضاء V.

الإثبات. ان S مستقلة خطياً (فرضاً)، وان S مجموعة عظمى من الأشعة المستقلة خطياً لأن عدد عناصرها يساوي بعد الفضاء، وإضافة أي عنصر V إلى المجموعة S يجعل المجموعة الجديدة «الإجتماع» مرتبطة خطياً لأن عناصر المجموعة الناتجة عن إضافة عنصر في V «$n+1$» وبالتالي حسب المبرهنة السابقة تكون S قاعدة.

تمارين:

$\boxed{I}$: أثبت أن المجموعة $S=\{v_1=t+2, v_2=2t-1, v_3=2t^2\}$ تشكل قاعدة للفضاء $V=\mathbb{R}_2[t]$ ثم عين احداثيات الشعاع $v=16t^2-7t+11$ بالنسبة للقاعدة S.

$\boxed{II}$: أثبت
$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x+y-3z=0,\ -x+2z=0,\ x+y-z=0\}$$
فضاء شعاعي جزئي في $\mathbb{R}^3$ ثم عين قاعدة وبعد W.

$\boxed{III}$: ليكن $V=\mathbb{R}^3$ فضاءاً شعاعياً معرف على حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، ولتكن
$$S_1=\{v_1=(2,3,1), v_2=(1,-1,1), v_3=(3,2,-1), v_4=(4,1,2)\}$$
$$S_2=\{u_1=(1,2,3), u_2=(2,3,1), u_3=(3,1,2)\}$$
مجموعات جزئية في V.

المطلوب: 1): أثبت أن S_1 تولد الفضاء V ثم عين قاعدة للفضاء V محتواة في S_1.

2): أثبت أن S_2 تشكل قاعدة للفضاء V ثم عين احداثيات الشعاع $v=(2,0,7)$ بالنسبة للقاعدة S_2.

/ /

ملاحظة: بعد أي فضاء من الشكل $\mathbb{R}_n[t]$ هو $n+1$

حل التمرين $\boxed{I}$: بما أن $\dim(V)=3$ وعدد عناصر ك يساوي 3 فإنه لتكون ك قاعدة يكفي أن تكون ك مستقلة خطياً. نحدد مركبات عناصر ك

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0+0-10 \neq 0$$

ومنه ك مستقلة خطياً وبالتالي ك قاعدة للفضاء V

تعيين الإحداثيات: $v=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3$

$$16t^2-7t+11 = \lambda_1(t+2)+\lambda_2(2t-1)+\lambda_3(2t^2)$$
$$=(2\lambda_3)t^2+(\lambda_1+2\lambda_2)t+2\lambda_1-\lambda_3$$

$$\Rightarrow 16=2\lambda_3 \Rightarrow \boxed{\lambda_3=8}$$

$$\left.\begin{array}{l} -7=\lambda_1+2\lambda_2 \\ 11=2\lambda_1-\lambda_2 \quad (\times 2) \end{array}\right\}$$ بالطرح

$$15=5\lambda_1 \Rightarrow \boxed{\lambda_1=3}$$

$$\lambda_2=2\lambda_1-11=6-11\boxed{=-5}$$

ومنه احداثيات v في ك

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1=3 \\ \lambda_2=-5 \\ \lambda_3=8 \end{array}}$$

انتهت المحاضرة.