$$\Rightarrow \begin{rcases} x = \lambda_1 + \lambda_3 \\ y = \lambda_2 + \lambda_3 \\ z = \lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2 \end{rcases} \Rightarrow \text{بالجمع } x+y+z = 3\lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = 1/3\,(x+y+z) \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_1 = x - 1/3\,(x+y+z) = 1/3\,(2x-y-z) \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_2 = y - 1/3\,(x+y+z) = 1/3\,(2y-x-z) \in \mathbb{R}$$

ومنه يوجد $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ بحيث $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$

وعليه $\forall x \in V$ يكتب كتركيب خطي بدلالة عناصر $S = S_1 \cup S_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ ومنه $V = \mathrm{Span}(S)$

وبما أن $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ فإن $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ وبالتالي

$V = W_1 \oplus W_2$ متكاملان (الجمع مباشر).

تمرين: ليكن $V = \mathbb{R}^4$، $W_1 = \{(x,y,z,t) \in V ; x+y = z ,\ x - t = z - y\}$

$W_2 = \{(x,y,z,t) \in V ; 2x - y + t = 0 ; x + 3y - z = 0\}$

فضاءات شعاعية جزئية في V. أوجد قاعدة وبعد كل من W_1, W_2 ، $W_1 \cap W_2$ ، $W_1 + W_2$. هل W_1, W_2 متكاملان.

المحاضرة الثانية عشرة   ٢ / ١٢ / ٢٠١٣

ليكن V ، W فضائين شعاعيين جزئيين معرفين على حقل K نعرف على الجداء قانون تشكيل

$$V \times W = \{(v,u) : v \in V, u \in W\}$$

$$\forall x = (v_1, w_1), y = (v_2, w_2) \in V \times W$$

$$x + y = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$

$$\forall \lambda \in K, \forall x = (v,w) \in V \times W \Rightarrow \lambda x = (\lambda v, \lambda w)$$

عندئذ $(V \times W, +, \cdot)$ فضاء شعاعي معرف على حقل K

مبرهنة: اذا كان V ، W فضائين معرفين على حقل K فإن:

$$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$$

الإثبات: نفرض $\dim V = n$ ، $\dim W = m$ عندئذ

$S_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ ، $S_2 = \{u_1, \dots, u_m\}$ قاعدتين للفضائين V ، W على الترتيب.

اذا المجموعة $T=\{(v_1,0),\dots,(v_n,0),(0,u_1),\dots,(0,u_m)\}$
تشكل قاعدة للفضاء $V\times W$ لأن:

① T تولد الفضاء $V\times W$:

$\forall x=(v,w)\in V\times W \Rightarrow v\in V,\ w\in W$

$v\in V \Rightarrow \exists\, \lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in F$;

$v=\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n$

$w\in W \Rightarrow \exists\, \mu_1,\mu_2,\dots,\mu_m\in F$;

$w=\mu_1 u_1+\mu_2 u_2+\dots+\mu_m u_m$

$\Rightarrow x=(\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n,\ \mu_1 u_1+\dots+\mu_m u_m)$

$=\lambda_1(v_1,0)+\lambda_2(v_2,0)+\dots+\lambda_n(v_n,0)+\mu_1(0,u_1)+\dots+\mu_m(0,u_m)$

أي: $\forall x\in V\times W$ فإن x يكتب كتركيب خطي بدلالة عناصر T ومنه $V\times W=\text{Span}(T)$

② T مستقلة خطياً:

$0=\lambda_1(v_1,0)+\lambda_2(v_2,0)+\dots+\lambda_n(v_n,0)+\mu_1(0,u_1)+\mu_2(0,u_2)+\dots+\mu_m(0,u_m)$

$(0,0)=(\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n,\ \mu_1 u_1+\dots+\mu_m u_m)$

$\Rightarrow \begin{cases}0=\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n \Rightarrow \lambda_1=\dots=\lambda_n=0\\ 0=\mu_1 u_1+\dots+\mu_m u_m \Rightarrow \mu_1=\dots=\mu_m=0\end{cases}$

أي: $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=\mu_1=\mu_2=\dots=\mu_m=0$

ومنه T مستقلة خطياً وبالتالي T قاعدة للفضاء $V\times W$

مثال: $V=\mathbb{R}^4$

$W_1=\{(x,y,z,t)\in V : x+y=z,\ x-t=z-y\}$

$W_2=\{(x,y,z,t)\in V : 2x-y+t=0,\ x+3y-z=0\}$

فضاءان شعاعيان جزئيان في V أوجد قاعدة وبعد $W_1\times W_2$

الحل:

$W_1=\{(x,y,x+y,0) : x,y\in\mathbb{R}\}$

$=\{x(1,0,1,0)+y(0,1,1,0) : x,y\in\mathbb{R}\}$

$=\text{Span}\, S_1 :\ S_1=\{v_1=(1,0,1,0),\ v_2=(0,1,1,0)\}$

$W_2=\{(x,y,x+3y,y-2x) : x,y\in\mathbb{R}\}$

$=\{x(1,0,1,-2)+y(0,1,3,1) : x,y\in\mathbb{R}\}$

$= \operatorname{span} S_2 : \quad S_2=\{v_1=(1,0,1,-2)\ ,\ v_2=(0,1,3,1)\}$

ومنه المجموعة $S=\{(v_1,0),(v_2,0),(0,u_1),(0,u_2)\}$

تشكل قاعدة للفضاء $W_1\times W_2$ ومنه $\dim W_1\times W_2=4$

$(u_1,0)=((1,0,1,0),(0,0,0,0))$

$(v_2,0)=((0,1,1,0),(0,0,0,0))$

$(0,u_1)=((0,0,0,0),(1,0,1,-2))$

$(0,u_2)=((0,0,0,0),(0,1,3,1))$

ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل K بعده n ولتكن مجموعة جزئية من V $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ اذا كانت S مولدة بالفضاء V.
$V=\operatorname{span} S$ فهل S تشكل قاعدة للفضاء V؟

حسب ملاحظة: يوجد $T\subseteq S$ بحيث T قاعدة للفضاء V وبما أن بعد الفضاء يساوي عدد عناصر القاعدة فيكون عدد عناصر T يساوي n ومنه $T=S$ ومنه S قاعدة لـ V.

18/12/2013 الفصل (6) التطبيقات الخطية المحاضرة ((13)).

6-1- التطبيقات الخطية 6-1-1: تعريف:

ليكن V و W فضاءات شعاعية معرفة على حقل K نقول عن التطبيق $L:V\longrightarrow W$ انه تطبيق خطي $\forall u,v\in V, \forall\lambda\in K$

1) $L(u+v)=L(u)+L(v)$

2) $L(\lambda v)=\lambda . L(v)$

مثال: ليكن التطبيق $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \ : \ L(x,y)=(x+y,y)$

$\forall u=(x_1,y_1), v=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2, \forall\lambda\in\mathbb{R}$

$L(u+v)=L(x_1+x_2,y_1+y_2)$
$=L((x_1+x_2)+(y_1+y_2),y_1+y_2)$
$=((x_1+y_1)+(x_2+y_2),y_1+y_2)$
$=(x_1+y_1,y_1)+(x_2+y_2,y_2)$
$=L(u)+L(v)$

$L(\lambda v)=(\lambda x_1,\lambda y_1)$
$=(\lambda x_1+\lambda y_1,\lambda y_1)$
$=\lambda(x_1+y_1,y_1)$
$=\lambda L(v).$