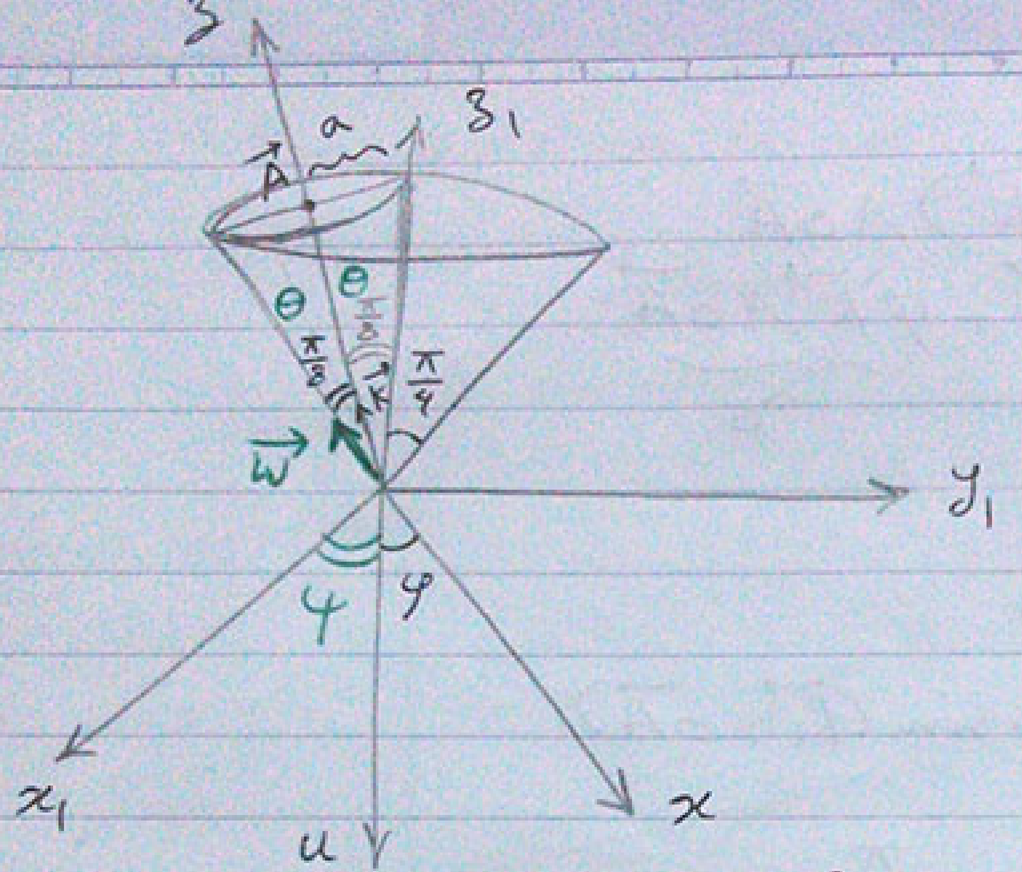
المحاضرة التاسعة عشر

مسألة

يتدحرج مخروط دوراني S رأسه ثابت O زاويته الرئيسية $\frac{\pi}{4}$ دون الانزلاق على السطح الداخلي لمخروط دوراني ثابت S_1 مشترك معه بالرأس O وزاويته الرئيسية $\frac{\pi}{2}$ والمطلوب: عين معادلات الحركة لـ S علماً أن نصف قطر قاعدة المخروط تساوي a والقيمة العددية لسرعة مركز قاعدته $4a$



نصف قطر القاعدة $= a$

$|\vec{v}(A)| = 4a$

φ, ψ, θ

$\theta = (\widehat{o3_1, o3})$

$\theta = \frac{\pi}{8}$

$tg\,\frac{\pi}{8} = \frac{a}{h}$

$\rightarrow h = \frac{a}{tg\,\frac{\pi}{8}}$

$\vec{\omega} = \psi^{`}\vec{k_1} + \varphi^{`}\vec{k} + \overset{=0}{\theta^{`}}\vec{u}$

$\vec{\omega} = \psi^{`}\vec{K_1} + \varphi^{`}\vec{K}$

$\vec{v}(A) = \vec{\omega} \wedge \vec{oA}$

$|\vec{v}(A)| = |\vec{\omega}|\,|\vec{oA}|\,\sin(\vec{\omega}, \vec{oA})$

$4a = |\vec{\omega}|\,.\,h\,\sin\frac{\pi}{8}$

$4a = |\vec{\omega}|\,\frac{a}{tg\,\frac{\pi}{8}} \cdot \sin\frac{\pi}{8} \rightarrow$

$4a = |\vec{\omega}|\,a\cos\frac{\pi}{8}$

$\rightarrow \boxed{|\vec{\omega}| = \frac{4}{\cos\frac{\pi}{8}}} \rightarrow$

$\vec{\omega} = \psi^{`}\vec{K_1} + \varphi^{`}\vec{K}$

$\vec{\omega}^2 = \psi^{`2} + \varphi^{`2} + 2\psi^{`}\varphi^{`}\,\vec{K_1}\cdot\vec{K}$ غير متعامدين انتباه

$$\boxed{\frac{16}{\cos^2\frac{\pi}{8}} = \psi^{`2} + \varphi^{`2} + 2\psi^{`}\varphi^{`}\cos\frac{\pi}{8}}$$

$$\vec{v}(A) = \vec{\omega} \wedge \vec{OA}$$

$$= (\psi' \vec{k_1} + \varphi' \vec{k}) \wedge \vec{OA}$$

$$= \psi' \vec{k_1} \wedge \vec{OA} + \underbrace{\varphi' \vec{k} \wedge \vec{OA}}_{=0}$$

$$\vec{v}(A) = \psi' \vec{k_1} \wedge \vec{OA}$$

$$|\vec{v}(A)| = |\psi'| \cdot |\vec{OA}| \cdot \sin(\vec{k_1}, \vec{OA})$$

$$4a = |\psi'| \frac{a}{tg\frac{\pi}{8}} \cdot \sin\frac{\pi}{8}$$

$$|\psi'| = \frac{4}{\cos\frac{\pi}{8}} \longrightarrow \psi = \frac{4}{\cos\frac{\pi}{8}} t + \psi_0$$

نفرض $t = 0, \psi = 0 \Rightarrow \psi_0 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\psi = \frac{4}{\cos\frac{\pi}{8}} t}$$

$$\frac{16}{\cos^2\frac{\pi}{8}} = \frac{16}{\cos^2\frac{\pi}{8}} + \varphi'^2 + \frac{8}{\cos\frac{\pi}{8}} \varphi' \cos\frac{\pi}{8}$$

$$0 = \varphi'^2 + 8\varphi'$$

$$0 = \varphi'(\varphi' + 8)$$

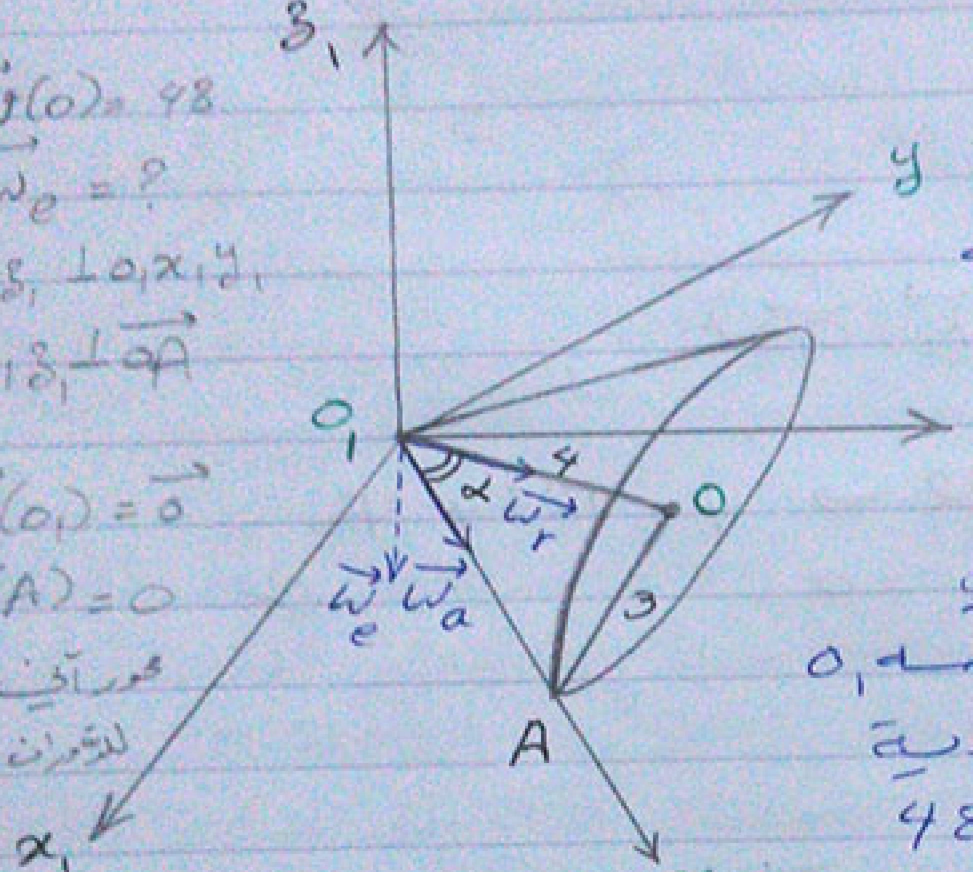
$$\rightarrow \varphi' = 0 \Rightarrow \varphi = c$$

$$\varphi' + 8 = 0 \Rightarrow \varphi' = -8 \Rightarrow \varphi = -8t + \varphi_0$$

نفرض

$t=0 \,,\ \varphi=0 \Rightarrow \varphi_0=0$

$$\rightarrow \boxed{\varphi = -8t}$$



$\vec{v}(O) = 48$

$\vec{\omega}_e = ?$

$O_1z_1 \perp O_1x_1y_1$

$O_1z_1 \perp \vec{O_1A}$

$\vec{v}(O_1) = \vec{0}$

$\vec{v}(A) = 0$

محور آني للدوران O_1A

مسألة:

يتدحرج مخروط دوراني ارتفاعه $h=4$ ونصف قطر قاعدته $r=3$ نصف زاويته الرأسية α دون انزلاق على المستوي الأفقي الثابت $O_1x_1y_1$ حيث يبقى رأسه O_1 ثابت علماً أن القيمة العددية لسرعة مركز قاعدة المخروط 48

- O هو مركز قاعدة المخروط:

المطلوب:

1) عين شعاع الدوران الجبري للمخروط حول O_1z_1

2) عين شعاع الدوران الآني له بدلالة الزمن.

$(OA)^2 = (3)^2 + (4)^2$

$\rightarrow |\vec{OA}| = 5$

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$$\vec{v}(O) = \vec{\omega}_a \wedge \vec{O_1O}$$

$$48 = |\vec{\omega}_a|\,|\vec{O_1O}| \sin\alpha$$

$$= |\vec{\omega}_a|\, 4 \left(\frac{3}{5}\right)$$

$$48 = \frac{12}{5} |\vec{\omega}_a| \Rightarrow |\vec{\omega}_a| = 15$$

$$\vec{v}(o) = \vec{\omega}_a \wedge \overrightarrow{O_1O}$$

$$= (\vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e) \wedge \overrightarrow{O_1O}$$

$$= \underbrace{\omega_r \wedge \overrightarrow{O_1O}}_{=0} + \vec{\omega}_e \wedge \overrightarrow{O_1O}$$

$$\vec{v}(o) = \vec{\omega}_e \wedge \overrightarrow{O_1O}$$

$$\vec{v}(o) = \varphi' \vec{k_1} \wedge \overrightarrow{O_1O}$$

$$48 = |\varphi'| \, |\overrightarrow{O_1O}| \sin(\vec{k_1}, \overrightarrow{O_1O})$$

$$48 = |\varphi'| . 4 \rightarrow \varphi' = 12 \rightarrow \varphi = 12t + \varphi_0$$

$t=0 \, , \, \varphi = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$ نفرض

$$\boxed{\varphi = 12t}$$

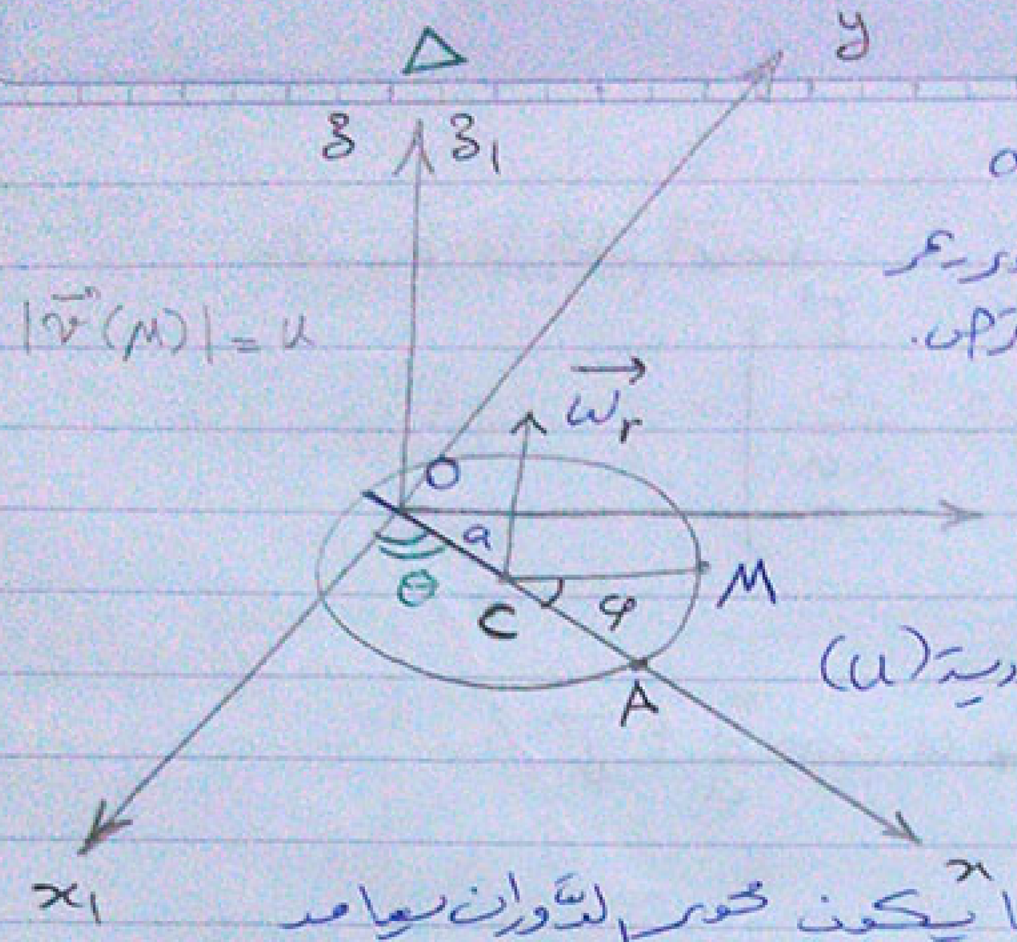
$$\vec{\omega}_e = \varphi' \vec{k_1} \rightarrow \vec{\omega}_e = 12 \vec{k_1}$$

$\vec{\omega}_a = \omega_a \vec{u} \rightarrow$ شعاع الواحدة محمول عليه

$$= \omega_a (\cos \varphi \, \vec{i_1} + \sin \varphi \, \vec{j_1})$$

$$\vec{\omega}_a = 15 (\cos 12t \, \vec{i_1} + \sin 12t \, \vec{j_1})$$

مسألة



يدور قرص دائري نصف قطره a
بسرعة زاوية ω ثابتة حول محور عمودي
من نقطة O تقع على محيط القرص.
تنزلق نقطة M بدءاً من
الموضع A المقابل
قطرياً لـ O على المحيط
بسرعة منتظمة قيمتها العددية (u)
$\vec{v}(M) = u$ والمطلوب:
1) عين السرعة المطلقة والتسارع المطلق لـ M عندما يكون محور الدوران يعامد مستوي القرص.

الحل: نختار جملة محاور ثابتة $Ox_1y_1z_1$ بحيث ينطبق محور الدوران على Oz_1 ونختار جملة المحاور المتماسكة بحيث ينطبق محور الدوران على Oz ونختار المحور Ox منطبق على OA، إن حركة M النسبية هي دائرية على محيط القرص حول C ومنه مسار M النسبي هو محيط القرص أما حركة M الجرية هي حركة دورانية حول محور الدوران Δ المنطبق على Oz. مسار M الجري هو دائرة مركزها O ونصف قطرها:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e$$

$$OA = 2a$$

$$\vec{v}_r(M) = \vec{\omega}_r \wedge \vec{CM}$$
$$= |\vec{\omega}_r| \cdot |\vec{CM}| \sin(\vec{\omega}_r, \vec{CM})$$

$$u = |\vec{\omega}_r| \cdot a \rightarrow \omega_r = \frac{u}{a}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{u}{a} \Rightarrow \varphi = \frac{u}{a} t + \varphi_0$$

نفرض $\varphi = 0,\ t = 0 \rightarrow \varphi_0 = 0 \rightarrow \boxed{\varphi = \frac{u}{a} t}$

$$\vec{v}_r(M) = \vec{\omega}_r \wedge \vec{CM}$$

بالإسقاط على الجملة المتحركة :

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{u}{a} \\ a\cos\varphi & a\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_r(M) = \left(-u\sin\frac{u}{a}t\right)\vec{i} + u\cos\frac{u}{a}t\,\vec{j}$$

$$\vec{v}_e = \vec{\omega}_e \wedge \vec{OM}$$

$$\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM}$$

$$\vec{OM} = a\vec{i} + a\cos\varphi\,\vec{i} + a\sin\varphi\,\vec{j}$$

$$= \left(a + a\cos\frac{u}{a}t\right)\vec{i} + a\sin\frac{u}{a}t\,\vec{j}$$

$$\vec{v}_e(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ a + a\cos\frac{u}{a}t & a\sin\frac{u}{a}t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_e(M) = -\omega a\sin\frac{u}{a}t\,\vec{i} + \omega\left(a + a\cos\frac{u}{a}t\right)\vec{j}$$

$$\vec{v}_a(M) = -\sin\frac{u}{a}t\,(\omega a + u)\,\vec{i} + \left(\omega a + a\omega\cos\frac{u}{a}t + u\cos\frac{u}{a}t\right)\vec{j}$$

$$\vec{\Gamma}_a(M) = \left.\frac{d\vec{v}_a(M)}{dt}\right|_{M} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_a(M)$$

$$\left.\frac{d\vec{v_a}(M)}{dt}\right|_M = \frac{-u}{a}(\omega a + u)\cos\frac{u}{a}t\,\vec{i}$$

$$+\left(-\omega u \sin\frac{u}{a}t - \frac{u^2}{a}\sin\frac{u}{a}t\right)\vec{j}$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v_a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ 0 & 0 & \omega \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix}$$