ثالثا : طريقة سيمبسون :

في هذه الطريقة نقسم المجال $[a,b]$ إلى n قسم حيث n عدد زوجي فيكون :

$$[a,b] = [x_0, x_2] \cup [x_2, x_4] \cup \dots \cup [x_{n-2}, x_n]$$

ولحساب التكامل ($\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx$) نوجد التابع $f(x)$ بالاعتماد على حدودية الاستيفاء بطريقة نيوتن الأمامية وذلك بتقريب التابع $f(x)$ إلى حدودية من الدرجة الثانية كما يلي :

$$f(x) \approx P_{2(x)} = \bar{P}_{2(t)} = y_0 + t\,\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0 \quad : \; x = th + x_0$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\,dx = \int_0^2 \bar{P}_2(t)\,h\,dt$$

$$= h\int_0^2 \left(y_0 + t\,\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0\right)dt$$

$$= h\left[y_0 t + \frac{t^2}{2}\Delta y_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right)\Delta^2 y_0\right]_0^2$$

$$= h\left(2y_0 + 2\,\Delta y_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 y_0\right)$$

$$= h\left(2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right)$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

ومنه :

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

وبالتالي المساحة الكلية حسب طريقة سيمبسون تعطى بالقانون :

$$\boxed{I = \int_{a}^{b} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)}$$

مثال :

باستخدام طريقة سيمبسون أوجد قيمة تقريبية للتكامل :

$$I = \int_{0}^{0.8} \frac{dx}{1 + x^2}$$

حيث $n = 8$

الحل :

نلاحظ أن $h = 0.1$ ومنه :

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	1	0.99	0.9615	0.9174	0.862	0.8	0.7352	0.6711	0.6097

$$I = \int_{0}^{0.8} \frac{dx}{1 + x^2} \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + y_8\right)$$

$$= \frac{0.1}{3}\left(1 + 4(0.99) + 2(0.9615) + 4(0.9174) + 2(0.862) + 4(0.8) + 2(0.7352) + 4(0.6711) + 0.6097\right)$$

$$= 0.6747$$

مثال :

باستخدام طريقة سيمبسون أوجد قيمة تقريبية للتكامل :

$$I = \int_{1}^{2} \sqrt{1+x^2}\ dx$$

حيث $n = 4$

الحل :

نلاحظ أن $h = 0.25$

x	1	1.25	1.5	1.75	2
$f(x)$	1.4142	1.6007	1.8027	2.0155	2.236

$$I = \int_{1}^{2} \sqrt{1+x^2}\ dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$= \frac{0.25}{3}(1.4142 + 4 \times 1.6007 + 2 \times 1.8027 + 4 \times 2.0155 + 2.236)$$

$$= 1.81$$

وظيفة :

اعد التمرين السابق من اجل التكامل

$$I = \int_{0}^{0.8} \frac{dx}{x^2+4}$$

حيث $n = 4$

... انتهت المحاضرة (19) ...